浙江工業大學

# 本科毕业设计论文

论文题目 Lie 对称群方法及其在几类方程中的应用

导师姓名 沈守枫

学生姓名 金理宝

学生学号 201110790207

院　　系 理学院

专　　业 数学与应用数学

班　　级 应数 1101 班

二〇一五年六月

# Lie 对称群方法及其在几类方程中的应用

学生姓名：**金理宝**　　导师姓名：**沈守枫**

浙江工业大学理学院

## 摘　要

本文研究了 Lie 对称群方法 (Lie Symmetry Methods) 及其在微分方程中的应用。微分方程的李对称群方法系统地统一以及拓展了已广为人知的微分方程（特别是非线性微分方程）构造显式解的技巧。该方法为更深入地研究非线性偏微分方程提供了可能，因此研究此类方法尤为重要。本文分为四章：

第二章简要地介绍了微分方程 Lie 对称群的基本概念，通过考虑利用李点变换群的无穷小生元将一个函数映射到另一个函数并且保持它们的自变量保持不变。其中概念包括 Lie 变换群、无穷小变换群、不变函数、点变换和拓展变换等有助于增进对后文的理解。

第三章引入了偏微分方程不变性的理论，叙述了对称、偏微分方程的不变性、不变解等相关概念。在这些已知理论的基础上，针对几类重要的发展方程 (详见下一章)，得到了三次发展方程的 Lie 变换群理论，推导出 $n$ 阶无穷小的延拓公式，为后文使用 Mathematica 编程计算提供了理论基础。随后用微分方程不变解的概念来阐明如何构造方程不变解的容许点对称以及若干用于简化计算的定理。

第四章研究了几类重要的偏微分方程：Burgers 方程、变形的 Burgers 方程、KdV 方程、广义的 KdV 方程、KdV-Burgers 方程、广义的 KdV-Burgers 方程和 (2+1) 维 KdV 型方程的对称，并具体阐述了运用 Lie 对称群方法来求解方程的步骤。值得注意的是，在求解 (2+1) 维 KdV 型方程时，发现了简化无穷小计算的定理。最后，以 Mathematica 为例讲述如何使用计算机代数系统来简化运用 Lie 对称群方法求解方程过程中遇到的复杂计算。

**关键词：**Lie 变换群，Burgers 方程，KdV 方程，KdV-Burgers 方程，Mathematica

# Lie Symmetry Methods and Their Applications to Differential Equations

Student: **Libao Jin** Advisor: **Dr. Shoufeng Shen**

College of Science

Zhejiang University of Technology

## Abstract

This paper is concerned with Lie symmetry methods (LSM) and their applications to partial differential equations (PDEs). These applications systematically unify and extend well-known ad hoc techniques to construct explicit solutions for differential equations, especially nonlinear PDEs. Hence, it is of great importance to study the LSM which make possible more profound inquiries to nonlinear PDEs. This dissertation embraces four chapters:

Chapter 2 briefly introduces the basic concepts of Lie groups of transformations that are cardinal in the subsequent chapters such as Lie groups of transformations, infinitesimal transformations, invariant functions, Lie group of point transformations and prolongations. By considering a Lie group of point transformations through its infinitesimal generator from the point of view of mapping functions into functions with their independent variables held fixed.

Chapter 3 covers theories with respect to the invariance of PDEs under Lie symmetry. Theory of Lie groups of transformations about third order evolutionary equations is developed based on the known results while formulae of $n$ th order infinitesimals, which lay a foundation for computing the infinitesimals with Mathematica, are attained simultaneously. It is also shown how to find admitted point symmetries and construct related invariant solutions with concepts such as symmetry, invariance of PDEs, invariant solutions etc.

Chapter 4 deals with several types of PDEs by using Lie groups of transformations to obtain the symmetry of given equations. These equations include modified Burgers equation, generalized KdV equation, generalized KdV-Burgers equation and (2+1)-dimensional KdV type equation. Noticeably, a theorem is discovered when solving (2+1)-dimensional KdV type equation. Ultimately, we illustrate how to simplify the sophisticated computations with computer algebra (e.g. Mathematica) when applying LSM to solve PDEs.

**Keywords:** Lie groups of transformations, Burgers equation, KdV equation, KdV-Burgers equation, Mathematica

# 目录

# 表列



# 图列



# Mathematica 代码列表

# 第一章　绪论

## 1.1　研究背景

Sophus Lie (1842 - 1899) 开创了连续群变换得到了不变微分方程系统。Lie 的成果为在相同概念下微分方程的求解提供了多元的并且特别的积分方法。的确，Lie 的无穷小变换方法为常微分方程以封闭形式的求解提供了广泛的技巧，可以用对称来确定一阶或线性常微分方程的标准解方法，通过常微分方程的分类，Lie 成功地确定所有的方程 (无论该方程能被约化还是可以通过群论技巧进行完全积分) 。

将 Lie 对称群方法应用到偏微分方程，可以得到解和守恒定律。使用微分方程的对称，则可以通过直接求得新解，和偏微分方程可以被归类到等价类。另外，通过 Lie 的方式得到的群不变解，有助于加深对物理模型的理解。而显式解可作为设计，精确测试，比较数字算法的标准。

如今，对称的概念在物理和数学的研究和发展中起着重要的作用。事实上 Lie 群和 Lie 代数被应用于数学的各个领域，包括微分几何，代数拓扑，分支理论等等。Lie 的创举对物理方面的微分方程的影响深远，无论是经典力学和量子力学，流体动力学，弹性力学还是其他诸多应用领域。

Lie 对称群方法也被用于复杂物理系统的繁琐运算中，甚至连用纸和笔都极易出错的中型微分方程系统的计算中也有其施展的空间。计算机代数系统如 Mathematica, MACSYMA, REDUCE, AXIOM, 和 MuPAD 为这些计算提供了诸多便利。在计算机代数系统中的符号计算包可以求得 Lie 点对称的计算方程，再用更为复杂的包将它们约化成一个等价但更便于计算的系统，随后以封闭的形式计算这些方程，然后得到 Lie 对称得到无穷小生成元 [15]。

经典的偏微分方程强对称群指的是作用在独立于因变量空间的连续变换群将已知解推到其他解，文献 [8, 27, 29] 通过连续对称群变换的方式，及减少偏微分方程的变量个数来求得的解是不变的，包括流动波解，相似解以及其他物理显著的解。Lie 的基本约化方法并不广为人知，Lie 对接触变换群作用下的偏微分方程的不变解感兴趣，但她的结果包括了现今局部约化定理。在文献中的第 65 章中，Lie 证明了两个变量的偏微分方程的对称群不变解可以通过求解约化之后的常微分方程所得到。在同一本书中，已经证明了广义的偏微分方程系统，即保持多变量方程的对称群不变。然而，我们发现关于本主题的相关文献并未引用这个成果。在文献的第二章第十节中也提到了该方法。强广义对称群方法在 Noether 定理的一个版本中使用过并且也在孤立子方程的研究中也使用过。若广义对称群方法与在文献 [27] 中提出的微分方程概念等价，于是，Peter J. Olver 于 1987 年在文献 [28] 中提出了关于偏微分方程系统的弱对称群概念，就此推广了由 Bluman 和 Cole 提出的非经典方法来求偏微分方程群不变解。给定任意的偏微分方程，即可通过约化偏微分方程来构造群不变解。反之，系统的每个解可通过用弱对称群约化的方式求得。

对称群技巧 (的运用) 为偏微分方程求解精确解析解提供了重要的方法。Lie 对称群方法是求解非线性系统的对称点的典型方法 [27] 。典型 Lie 对称群方法已经得到了许多推广，如非典型 Lie 对称群方法，CK 直接方法。楼等学者改进了 CK 直接法并且提出了一种简单方法 (称为改进的 CK 直接法) 来求解非 Lie 点对称群。使用改进的 CK 直接法，可以得到许多非线性系统的对称群和新精确解。这样的非线性系统包括 KP 方程，AKNS 系统，DS 方程，Camassa-Holm 方程，Jimbo-Miwa 方程，高阶 BK 系统，变系数典型的一般化 KP 方程，(2+1) 维扩散长波方程，耦合 KdV 方程，以及二维的 KdV-Burgers 方程 [32]。

Baumann 在文献 [4] 中也叙述道：Lie 群理论在微分方程中有着许多应用，可以概括成以下几点：

1. 常微分方程的降阶；
2. 由已知解得到新解；
3. 减少偏微分方程变量的个数 (即偏微分方程的约化) ；
4. 不变量的构造；
5. 边值问题的不变解构造；
6. 守恒定律的构造；
7. 微分方程线性变换的检测.

## 1.2 研究现状

正如文献 [17] 所叙述的，Lie 群与 Lie 代数是数学对象，起源于 Sophus Lie 利用正交以使用对称解微分方程的杰出成果。Sophus Lie (1842 - 1899) 开创了连续群变换得到了不变微分方程系统。起先，这些概念十分的复杂，涉及到 $\mathbb{R}^N$ 上的微分方程流。早在 20 世纪初，Lie 群理论的抽象雏形便已形成，由 Elie Cartan 在 Lie 代数的分类时的工作开创。抽象形成的优势在于简化数学分析的过程。因此在数学文献的呈现更据主导地位。然而抽象理论的目的在于理解数学结构而非解释其在解微分方程中的应用。于是，对许多应用数学家而言抽象并不清晰，实际上，Lie 群在应用数学和计算数学领域是十分有用的对象，自然而然，将难以调动他们的积极性来学习抽象理论。

在 1990 年，George Bluman 在文献 [6] 给定微分方程计算无穷小来简化 Lie 群的形式。在同一年，Bluman 在 [5] 中提出一种利用 $r$ -参数可解 Lie 群变换法将一个 $n$ 阶常微分方程约化到 $n-r$ 阶常微分方程的迭代算法。迭代过程能直接方程约化到的 $n-r$ 阶常微分方程，不需要计算 $n-r+1$ 到 $n-1$ 的任意一阶方程。该约化算法应用到了三阶 Blaiuis 方程，其允许两个数群和一个在研究不同介质中传播的波方程群性质出现的允许三参数的可解群的四阶常微分方程。

事实上，使用经典 Lie 对称群方法不能得到偏微分方程的群不变解。在 1993 年，P. A. Clarkon 在文献 [12] 中使用了源于 Clarkson 和 Krustal 在研究 Bossinesq 方程对称约化时的非群理论技巧，给出了若干非经典对称约化和在物理和数学层面有重要意义的非线性偏微分方程的精确解。同时，他给出下面几个方程的精确解。

1. Boussinesq 和 Kadomstsev - Petviasvil (完全可积孤立子方程)
2. 非线性的薛定谔方程
3. Fitzhug - Nagumo 方程
4. Navier - Stokes 方程
5. Zabolotzkaya - Khokhlov 方程 (二维 Burgers 方程，不完全可积)

在 1996 年，Fernado Casa 在文献 [11] 中提出了一种新算法来求柯西问题 (一个抛物线型偏微分方程) 的精确解，算法大致如下：先将偏微分方程转化成常微分方程矩阵，再运用 Lie 代数技巧即可求解。

也是在 1996 年，Mehmet Can 发现大量文献表明，群论在求解微分方程的这一方面还未得到大部分应用，原因可能是群论的使用者对群论所存在的误解所导致：

1. 求解方程的对称群的难度不亚于求解方程本身；
2. 群论求解得到的解仅仅是随机的特解；
3. 群论仅对求解线性方程有用。

粗略地讲，微分方程系统的对称群是自变量与因变量进行群变换使得所有的解集保持不变。一旦方程组的对称群已知，则可以从已知的旧解推得新解，并且经常可以由平凡解得到一些有意思的解。Lie 对称群可以用来对所得的解进行归类和简化微分方程的形式。另外一个重要的应用是对常微分方程的对称约化，以及减少偏微分方程的变量个数。

于是在文献 [10]，Mehmet 运用 Lie 点对称方法求解广义的四阶 Burgers 方程 (GBE4)，他使用名为 Mathematica 计算机代数包 (现为 Wolfram Mathematica 软件，截至 2015 年 06 月该软件最新版本为 10.1) 来实现求解 GBE4 的过程，得到了三维可解 Lie 代数点对称，同时也成功得到这些对称的相似约化。

1997 年，W. Nereman 等人在文献 [15] 中讲述了计算机代数包及有助于微分方程 Lie 代数计算的工具，同时列出了 Lie 对称分析和算法。他们讨论了 Lie 对称计算所使用到的方法和算法，另外还涉及到确定方程系统的计算，如何将它们约化到标准形式，求解技巧和对称群尺寸的计算。他们还介绍了李点对称转向和广义对称，以及非经典或条件对称。关于现代 Lie 对称程序，在计算机代数系统下进行分类的叙述，他们关心的是关于经典李点对称，接触 (或动态)，广义 (或 Lie - Bäcklund) 对称和非经典 (或条件) 对称的 Lie 对称的软件。在最近十年中，出现了相应的大部分包。

2006 年，Mark Craddock 和 Kelly A. Lennox 通过证明微分方程的对称群为非平凡的，得到了形如 $u_t = \sigma x^{\gamma} u_{xx} + f(x)u_x - \mu x^r u$ 的偏微分方程的基本解，其中用到了基本解的标准积分变换 [13]。他们将求基本解的过程最终转化成求拉普拉斯逆变换或者其他形式的经典变换。上述形式的偏微分方程在金融数学及其他领域有重要作用。他们推广了 Craddock 和 Platan 的技巧，他们的方法将问题转化为求拉普拉斯逆变换并以漂移 $f$ 的显式方程给出。Peter J. Olver 在书 [27] 中介绍了如何将 Lie 对称用作积分变换。M.S. Joshi 在 [24] 一文中通过偏微分方程给出了债券定价理论并且给出了广义的债券定价公式：$dx_t = f(X_t, t)dt + b(x_t, t)dW_t, X_0 = x$ 另外他们利用基本解的拉普拉斯积分变换求解 Ricatti 方程。

2010 年，N. M. Ivanova 在文献 [18] 中利用微分方程的现代 Lie 对称群方法分析来研究二维变系数的 Burgers 方程的类性质。这一类的群分类方法得到了运用，同时得到简化分类结果的等价变换。建立了微分不变量和不变微分算子等价变换，与 Lie 对称运算相关的约化和对任意元素的特定形式能求得精确解析解。最后，对守恒定律进行了分类。

2011 年，J. Jena 研究了 Lie 群变换对线性偏微分方程的不变解性质 [21]。不变曲面条件和自变量与因变量的 Lie 群变换微元可以用来求广义辅助方程。她的研究成果是一种适用于线性偏微分方程的算法，可以求偏微分方程的解或约化偏微分方程。她认为，在最近的三十年中，对称方法的发展迅猛并且关于 Lie 群变换的工作也大量被开展，涉及到物理和工程的各个分支的常微分方程和偏微分方程。由 Sophus Lie 开创的微分方程的对称方法有非常高的算法特性，从群的角度来看许多特殊的微分方程的求解技巧通常非常的巧妙。在数学和理论物理等的连续对称研究中，Lie 群的表示论扮演着重要的作用。要使用的基本工具是 Lie 代数的无穷小表示。通过一个扩展后 (延拓) 的偏微分方程的变换，她指的是连续变换群作用在一个包括因变量和自变量的变量空间。

Radha 和 Sharma [30] 在 Bluman 和 Cole [8] 以及 Logan 和 Perez 的研究基础上建立了自相似的解的完整类，这一成果打破了学术界的平静，轰动一时。该方法能够明确问题是不变的以及存在

自相似解的媒介，这种方法相继地被用于在以满足 Mei - Grueneisen 类型状态方程的尘气混合物为传播介质的怪波传播问题 [23] 。描述粘稠并且具有弹性材料的微分方程系统 [22]；浅水中弱不连续波的作用 [19] ，以及在常态气体中不连续波的作用 [20]。

线性偏微分方程包括来自剪切流描述方程，不同介质的扩散方程，在不同介质中声音的干扰。实际上，它包括数学物理中的许多方程：电报方程，扩散方程，泊松方程，薛定谔方程，Fokker-Plank 方程等。这里，为了探求更为简单的方法，因为 Lie 群变换的有效性，她将偏微分方程约到一阶偏微分方程，使用改自文献 [19, 20, 22, 23, 25, 30] 的方法和方程系统的不变性。有意思的是，该方法仅用更少 Lie 群变换的理论即可得到更简单的算法。最后她成功地创造了一个原理简单，易用的线性微分方程算法，该算法可以实现求解微分方程或者对减少方程因变量个数，她使用 Lie 群变换来求解二阶和三阶偏微分方程 [21]，和用相同的变换得到任意阶偏微分方程的算法该算法可由适当的例子验证 [31]。

2014 年，因为关于李著名方程如通过李点对称确定的微分方程理论被广泛引用并且应用到常微分方程之中，Ganni Manno 团队在文献 [26] 考虑了一些在 $\mathbb{R}^k$ 上向量域的相关 Lie 代数，和以此确定 Lie 代数显著方程。在微分方程对称几何理论的大背景下，Manno 对微分方程 (包括常微分方程和偏微分方程) 在什么条件下能够由点对称的 Lie 代数唯一确定非常感兴趣，开始研究常微分方程中的逆问题：给定向量域的 Lie 代数，如何构建一个具有以 $\mathfrak{g}$ 作为李点对称的子代数和满足在后面会提到的一些能够保证唯一性的微分方程。这种想法需要追溯到 Sophus Lie ，他提出了 $u_{xx} = 0$ 是唯一的二阶微分方程，到点变换其允许八位 Lie 对称群在微分方程的方面也同样提出了相似的观点。她证明了仅标量二阶偏微分方程 (一个不知名的二元函数) ，允许 $\mathbb{R}^n$ 向量投影的 Lie 代数作为李点对称子代数是一个 Monge - Ampere 方程 $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$ 。

2015 年，Zhihong 基于 Lie 群理论角度研究具有分布延迟的反应扩散方程，他们首先给出发展无穷小向量域 $\vec{v}$ 以及通过广义的对称群理论 $\vec{v}$ 求对应的一系列群不变解 [35] 。

## 1.3 本文的主要工作及其研究意义

本文主要介绍了李对称群的基本理论和微分方程不变性等相关理论，在这些理论的基础上，笔者针对三次发展方程 (二次发展方程仅为其中的一种特殊情况)，推导出了任意阶无穷小的延拓公式，其便于在获得微分方程的确定方程形式后，将具体的无穷小代入到上述表达式中得到具体的确定方程；再者，其为计算机代数系统 (如 Maple，Mathematica 等) 采用递归函数的方式计算无穷小提供了理论基础，使得程序有较高的可移植性，并且后期的维护提供了保证。另外，笔者提出了一个简化无穷小计算过程的猜想。然后，笔者将李对称群方法运用到求解几类重要的微分方程中：变形的 Burgers 方程，广义的 KdV 方程，广义的 KdV-Burgers 方程以及 (2+1) 维 KdV 型方程，并且求得各个方程的对称。求解过程中涉及多项式的运算与化简，方程组的求解，计算过程的繁琐与重复使得求解过程极易出错，求解就此停滞不前。因此，要求使用 Lie 对称群来求解微分方程必须要求解题者有超人的耐心、细心和自信心。为了克服以上复杂的计算过程，笔者编写了适用于任意有限阶 (1+1) 维发展方程的 Mathematica 化简多项式以获得超定方程组的程序，从而将原本繁杂冗长的计算过程简化成快捷且正确性能保证的过程。

本文的研究意义在于成功地运用 Lie 对称群理论求解推广后的几类方程，得到的结果对现实问题 (如弹性管道内液体流动问题) 的解决提供了有力帮助。推得的理论对后续的研究工作也能提供有力的支持。

# 第二章　微分方程的 Lie 对称群理论

对称性的思想在以微分方程表示的数学模型中应用很普遍。19 世纪的伟大的数学家 Sophus Lie 为了整理大量的求解 ODEs 的技巧，受到他的同事 Sylow (挪威人) 关于 Abel 和 Galois 的解代数方程的工作的讲座的启发，引入了连续变换群的概念。在连续群理论中，提出并详尽地阐述了微分方程对称性这一数学工具。Lie 群分析方法给出了使用线性和非线性微分方程的对称性并使用该特性来进行积分的一般方法。Lie 群分析方法在求解非线性偏微分方程精确解方面也是很有效的 [14]。

## 2.1　Lie 变换群 [7]

首先定义群，然后考虑变换群，特别是单参数 Lie 变换群。这里变换作用在 $\mathbb{R}^n$ 上。

### 2.1.1　群

**定义** 2.1　群 $G$ 是满足结合律 $\phi$ 的元素的集合，并且元素之间满足如下的公理：

1. 封闭性。对 $G$ 的任意元素 $a,b,\phi(a,b)$ 是 $G$ 的元素。
2. 结合性。$G$ 的任意元素 $a,b,c$ 满足

$$\phi(a,\phi(b,c))=\phi(\phi(a,b),c).$$

3. 单位元。存在 $G$ 的唯一单位元 $e$，使得对 $G$ 的任意元素 $a$，有

$$\phi(a,e)=\phi(e,a)=a.$$

4. 逆元。对 $G$ 的任意元素 $a$，$G$ 中存在唯一的逆元 $a^{-1}$，有

$$\phi(a,a^{-1})=\phi(a^{-1},a)=e.$$

### 2.1.2　变换群

**定义** 2.2　令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 位于区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 中，对于 $D$ 中的每个元素 $x$ 和集合 $S\subset\mathbb{R}$ 中的参数 $a,\phi(a,b)$ 定义了 $S$ 中参数 $a$ 与 $b$ 之间的组合律，则变换集合

$$\bar{x}=X(x;a)$$

构成 $D$ 上的单参数变换群，如果下面的条件成立：

1. 对 $S$ 中的每个 $a$，变换在 $D$ 上是一对一的，因此 $\bar{x}\in D$。
2. 具有组合律 $\phi$ 的 $S$ 组成一个群 $G$。
3. 对于 $D$ 中每个 $x,\bar{x}=x$，当 $a=a_0$ 对应于单位元 $e$，即 $X(x;a_0)=x$。
4. 如果 $\bar{x}=X(x;a),\bar{\bar{x}}=X(\bar{x};b)$，那么 $\bar{\bar{x}}=X(x;\phi(a,b))$。

### 2.1.3 单参数 Lie 变换群

**定义** 2.3 除了满足定义 2.2 的条件外，如果还满足：

5. $a$ 为连续参数，即 $S$ 为 $\mathbb{R}$ 上的闭集。不失一般性，$a=0$ 对应于单位元 $e$。
6. $X$ 为 $D$ 上关于 $x$ 是无穷次可微的，并且是 $S$ 中 $a$ 的解析函数。
7. $\phi(a,b)$ 为 $a$ 和 $b$ 的解析函数，$a\in S, b\in S$。

那么单参数变换群称为单参数 Lie 变换群。

## 2.2 无穷小变换群

考虑单参数 (a) Lie 变换群

$$\bar{x}=X(x;a), \tag{2.1}$$

单位元为 $a=0$，组合律为 $\phi$ 。在 $a=0$ 附近泰勒展开 (2.1) 式，得

$$\begin{aligned}\bar{x}&=x+a\left(\left.\frac{\partial X(x;a)}{\partial a}\right|_{a=0}\right)+\frac{1}{2}a^2\left(\left.\frac{\partial^2 X(x;a)}{\partial a^2}\right|_{a=0}\right)+\cdots\\&=x+a\left(\left.\frac{\partial X(x;a)}{\partial a}\right|_{a=0}\right)+O(a^2).\end{aligned}$$

令 $\xi(x)=\left.\frac{\partial X(x;a)}{\partial a}\right|_{a=0}$ 变换 $x+a\xi(x)$ 称为 Lie 变换群 (2.1) 的无穷小变换。相应地，$\xi(x)$ 叫做 (2.1) 的无穷小。

### 2.2.1 Lie 第一基本定理

首先给出下面的引理：

**引理** 2.1 单参数 (a) Lie 变换群 (2.1) 满足关系

$$X(x;a+\Delta a)=X(X(x;a);\phi(a^{-1},a+\Delta a)).$$

**定理** 2.1 (**Lie 第一基本定理**) 存在参数化 $\tau(a)$ ，使得 Lie 变换群 (2.1) 等价于一阶常微分方程初值问题 $\frac{\partial\bar{x}}{\partial\tau}=\xi(\bar{x})$ 且 $\bar{x}=x$。

### 2.2.2 无穷小生成元

根据 Lie 第一基本定理 2.1，以下不失一般性，假设单参数 (a) Lie 变换群是参数化的，其结合律满足 $\phi(a,b)=a+b$ ，因此 $a^{-1}=-a$。于是由它的无穷小 $\xi(x)$ ，单参数 Lie 变换群 (2.1) 变为

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial a}=\xi(\bar{x}),\quad \left.\bar{x}\right|_{a=0}=x,$$

**定义** 2.4　单参数 Lie 变换群 (2.1) 的无穷小生成元为算子

$$X = X(x) = \xi(x)\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.2}$$

这里 $\nabla$ 为梯度算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

对任意可微函数 $F(x) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，可知

$$XF(x) = \xi(x)\cdot\nabla F(x) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x_i},$$

注意 $Xx = \xi(x)$。

因此，根据 Lie 第一基本定理 2.1，由无穷小变换确定的单参数 Lie 变化群也是由它的无穷小生成元确定的。

## 2.3　拓展变换 (延拓)

下面我们研究给定微分方程组 $S$ 的单参数 Lie 变换群。

**定义** 2.5　单参数 (a) Lie 点变换群为具有如下形式的变换群

$$\begin{aligned}\bar{x} &= X(x,u;a),\\ \bar{u} &= U(x,u;a)\end{aligned}$$

且作用在 $n+m$ 变量空间上

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2, \cdots, x_n),\\ u &= (u^1, u^2, \cdots, u^m),\end{aligned}$$

其中 $x$ 代表 $n$ 个自变量，$u$ 表示 $m$ 个因变量。

引入下面的记号：令下标表示关于相应坐标的微分，如

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

**定义** 2.6　全导数定义为

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_n} + \cdots. \tag{2.3}$$

根据全导数算子 (2.3)，单参数 Lie 点变换群的 $k$ 阶延拓为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= X(x,y;a),\\ \bar{y} &= Y(x,y;a),\\ \bar{y}_i &= Y_i(x,y,y_1,y_2,\cdots,y_i;a)\\ &= \frac{DY_{i-1}(x,y,y_1,y_2,\cdots,y_{i-1};a)}{DX(x,y;a)}, i = 1,2,\cdots,k,\end{aligned}$$

其中 $Y_0 = Y(x, y; a)$。

下面我们给出单个因变量和 $n$ 个自变量拓展的无穷小变换。

作用在 $(x, u)$ 空间上的单参数 Lie 点变换群

$$\bar{x}_i = X_i(x, u; a) = x_i + a\xi_i(x, u) + O(a^2), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.4a}$$
$$\bar{u} = U(x, u; a) = u + a\eta(x, u) + O(a^2), \tag{2.4b}$$

有无穷小生成元

$$X = \xi_i * (x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

(2.4) 的 $k$ 阶延拓为

$$\begin{aligned}
\bar{x}_i &= X_i(x, u; a) = x_i + a\xi_i(x, u) + O(a^2), \\
\bar{u} &= U(x, u; a) = u + a\eta(x, u) + O(a^2), \\
\bar{u}_i &= U_i(x, u; a) = u_i + a\eta_i^{(1)}(x, u) + O(a^2), \\
&\vdots \\
\bar{u}_{i_1 i_2 \cdots i_k} &= U_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u; a) \\
&= u_{i_1 i_2 \cdots i_k} + a\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) + O(a^2),
\end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n, \quad i_l = 1, 2, \cdots, n, \quad l = 1, 2, \cdots, k; \quad k \geqslant 1$。它的 $k$ 阶无穷小为

$$\xi(x, u), \quad , \eta(x, u), \quad , \eta^{(1)}(x, u, \partial u), \quad \cdots, \eta^{(k)}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u),$$

且相应的 $k$ 阶无穷小生成元为

$$X^{(k)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_k}\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \cdots i_k}}, \quad k \geqslant 1.$$

**定理** 2.2　拓展的无穷小满足递推关系

$$\eta_i^{(1)} = D_i(\eta) - D_i(\xi_j)u_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.5a}$$
$$\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \cdots i_k} = D_{i_k}\left(\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}\right) - D_{i_k}(\xi_j)u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} j}, \tag{2.5b}$$

其中　$i_l = 1, 2, \cdots, n, \quad l = 1, 2, \cdots, k; \quad k \geqslant 2$。

# 第三章　偏微分方程的不变性

## 3.1　对称与微分方程的不变性

本节给出了对称的概念和介绍利用偏微分方程不变性的无穷小准则直接导出偏微分方程所拥有的 Lie 点变换群的无穷小生成元。

### 3.1.1　对称 [4]

本节将讨论微分方程系统在变换下因变量与自变量的不变性。我们检验的核心是一类特殊类型的变换，称之为 **Lie 对称** 。Lie 对称或点对称依赖于 (通过连续的参数) 将方程的每个解映射到同一个方程的其他解。在给出 Lie 对称的定义之前，我们先给出微分方程任意类型的对称的更一般化的概念。

**定义** 3.1　任意给定微分方程的对称为将一个方程的解映射到另一个解的变换。

此一般化定义的对称使得微分方程在大量的变换下保持不变性。李给出的以点变换形式的变换就是上述定义的变换的一种，下面我们给出 Lie 对称或点对称的明确定义：

**定义** 3.2　Lie 对称是一个保持微分方程因变量和自变量的不变的无穷小变换。

显然，微分方程的 Lie 对称组成一个群，任意两个对称的复合运算将会产生一个新的对称，包括单位变换，任意一个对称都存在一个逆变换，对称的复合运算满足结合律。

### 3.1.2　PDE 的不变性

首先，考虑 $k$ 阶 PDE。用

$$F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0 \tag{3.1}$$

表示一个 $k$ 阶 PDE，其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是自变量，$u$ 表示因变量，$\partial^j u$ 表示具有分量 $\frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_j}}, i_j=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,k$ 的坐标，它对应于 $u$ 对 $x$ 的所有 $j$ 阶偏导数。

假设根据 $u$ 的 $l$ 阶偏导数的一些特殊分量，PDE (3.1) 可以写成可解形式

$$F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=u_{i_1 i_2\cdots i_l}-f(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0,$$

其中 $f(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)$ 并不显式地依赖 $u_{i_1 i_2\cdots i_l}$。

**定义** 3.3　单参数 Lie 点变换群

$$\bar{x}=X(x,u;a), \tag{3.2a}$$

$$\bar{u}=U(x,u;a). \tag{3.2b}$$

保持 PDE (3.1) 不变，即它是 PDE (3.1) 的点对称。

由定义 3.3，根据无穷小生成元以及定理 2.2 关于延拓无穷小，可有如下的定理 (该节的剩下部分，用重复指标表示求和)。

**定理 3.1 (PDE 的不变性的无穷小原则)** 令

$$X=\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.3}$$

是 Lie 变换群 (3.2) 的无穷小生成元。令

$$X^{(k)}=\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}+\eta_i^{(1)}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i}+\cdots+\eta_{i_1i_2\cdots i_k}^{(k)}(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2\cdots i_k}} \tag{3.4}$$

是 (3.3) 的 $k$ 阶延拓无穷小生成元，其中

$$\xi(x,u)=(\xi_1(x,u),\xi_2(x,u),\cdots,\xi_n(x,u)),\eta(x,u).$$

$\eta_i^{(1)}$ 和 $\eta_{i_1i_2\cdots i_j}^{(j)}, i_j=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,k$ 由 (2.5) 确定，则单参数 Lie 点变换 (3.2) 为 PDE (3.1) 所拥有，即是 PDE (3.1) 的点对称，当且仅当

$$X^{(k)}F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0,\quad 对F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0.$$

## 3.2 PDEs 的不变性

### 3.2.1 不变解

考虑 $k$ 阶 PDE (3.1) ($k\geqslant 2$)，它拥有单参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (3.3)。假设

$$\xi(x,u)\neq 0.$$

**定义 3.4** $u=\Theta(x)$ 是 PDE (3.1) 的不变解，且该解源于它的具有无穷小生成元 (3.3) 的点对称，当且仅当

1. $u=\Theta(x)$ 是 (3.3) 的不变曲面；
2. $u=\Theta(x)$ 满足 (3.1)。

由此可知，$u=\Theta(x)$ 是 PDE (3.1) 在点对称 (3.3) 作用下的不变解，当且仅当 $u=\Theta(x)$ 满足下面两个条件：

1. $X(u-\Theta(x))=0$，当 $u=\Theta(x)$，即
$$\xi_i(x,\Theta(x))\frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_i}=\eta(x,\Theta(x)); \tag{3.5}$$
2. $F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0$，当 $u=\Theta(x)$，即
$$F(x,\Theta(x),\partial\Theta(x),\partial^2\Theta(x),\cdots,\partial^k\Theta(x))=0.$$

对于源于点对称 (3.3) 作用下不变性所得到的不变解来说，方程 (3.5) 称为不变曲面条件。PDEs 的不变解首次由 Lie (1881) 所研究。它们可以通过不变形式法和直接代入法来确定 (详见 [14])。

### 3.2.2　$k$ 阶 PDE 对称的确定方程

考虑 $k$ 阶 PDE $(k \geqslant 2, l \leqslant k)$

$$u_{i_1 i_2 \cdots i_l} = f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u), \tag{3.6}$$

其中 $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ 不显式地依赖 $u_{i_1 i_2 \cdots i_l}$，根据定理 3.1 可知，PDE (3.6) 拥有单参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为

$$X = \xi_i(x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.7}$$

它的 $k$ 阶延拓为 (3.4)，当且仅当 $\xi(x, u), \eta(x, u)$ 满足对称确定方程

$$\eta^{(l)}_{i_1 i_2 \cdots i_l} = \xi\frac{\partial f}{\partial x_j} + \eta\frac{\partial f}{\partial u} + \eta^{(1)}_j\frac{\partial f}{\partial u_j} + \cdots + \eta^{(k)}_{j_1 j_2 \cdots j_k}\frac{\partial f}{\partial u_{j_1 j_2 \cdots j_k}} \tag{3.8}$$

## 3.3　三次发展方程的 Lie 对称群

### 3.3.1　三次发展方程与无穷小变换

我们用公式表示偏微分方程对称群的定义，考虑三次发展方程

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}), \quad \partial F/\partial u_{xxx} \neq 0. \tag{3.9}$$

那么其所对应的单参数 Lie 点变换群 $G$ 可由 (3.2) 可具体写作

$$\begin{aligned} \bar{t} &= T(t, x, u; a), \\ \bar{x} &= X(t, x, u; a), \\ \bar{u} &= U(t, x, u; a), \end{aligned} \tag{3.10}$$

**定义 3.5**　如果方程 (3.9) 在新变量 $\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}$ 下有相同的形式，即

$$\bar{u}_{\bar{t}} = F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) \tag{3.11}$$

其中方程 $F$ 和方程 (3.9) 是相同的，那么变换的单参数群 $G$ 称为被方程 (3.9) 容许，同时 $G$ 也称为方程 (3.9) 的一个对称群。

对称群 $G$ 的构成和它的 **无穷小变换**

$$\bar{t} \approx t + a\tau(t, x, u), \quad \bar{x} \approx x + a\xi(t, x, u), \quad \bar{u} \approx u + a\eta(t, x, u). \tag{3.12}$$

的决定是等价的，上式是由 (3.10) 通过泰勒级数对群系数 $a$ 展开并只保留对 $a$ 的线性形式得到的。无穷小变换 (3.12) 提供了群 $G$ 的生成元，即微分算子

$$X = \tau(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.13}$$

应用于任意可微函数 $J(t, x, u)$ 并写为形式

$$X(J) = \tau(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial u}.$$

生成元 (3.12) 称为方程 (3.9) 的一个无穷小对称容许算子。

对应算子 (3.13) 的变换群 (3.10) 可以通过解 *李方程*

$$\frac{d\bar{t}}{da}=\tau(\bar{t},\bar{x},\bar{u}),\quad \frac{d\bar{x}}{da}=\xi(\bar{t},\bar{x},\bar{u}),\quad \frac{d\bar{u}}{da}=\eta(\bar{t},\bar{x},\bar{u})$$

求得。其初值条件为

$$\bar{t}\,|_{a=0}=t,\quad \bar{x}\,|_{a=0}=x,\quad \bar{u}\,|_{a=0}=u,$$

### 3.3.2 三次发展方程的延拓无穷小

下面我们求方程 (3.11) 中的 $\bar{u}_{\bar{t}},\bar{u}_{\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ [2]。首先需要确定一些导数的关系式 $\frac{\partial x}{\partial \bar{x}},\frac{\partial t}{\partial \bar{x}},\frac{\partial x}{\partial \bar{t}},\frac{\partial t}{\partial \bar{t}}$。将变换

$$\bar{t}=t+a\tau(t,x,u)+O(a^2), \tag{3.14a}$$

$$\bar{x}=x+a\xi(t,x,u)+O(a^2), \tag{3.14b}$$

$$\bar{u}=u+a\eta(t,x,u)+O(a^2), \tag{3.14c}$$

的 (3.14a) 和 (3.14b) 的两端分别对 $\bar{x}$ 求导数，得到

$$\begin{aligned} 0&=\frac{\partial t}{\partial \bar{x}}+a\left[D_x(\tau)\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}+D_t(\tau)\frac{\partial t}{\partial \bar{x}}\right]+O(a^2),\\ 1&=\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}+a\left[D_x(\xi)\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}+D_t(\xi)\frac{\partial t}{\partial \bar{x}}\right]+O(a^2). \end{aligned} \tag{3.15}$$

将上式 (3.15) 看成关于 $\frac{\partial t}{\partial \bar{x}}$ 和 $\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}$ 的方程组，整理后由 Cramer 法则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}&=\frac{1+aD_t(\tau)+O(a^2)}{[1+aD_t(\tau)]\,[1+aD_x(\xi)]-a^2D_x(\tau)D_t(\xi)+O(a^2)}=\frac{1+aD_t(\tau)+O(a^2)}{1+a\,[D_t(\tau)+D_x(\xi)]+O(a^2)},\\ \frac{\partial t}{\partial \bar{x}}&=\frac{-aD_x(\tau)+O(a^2)}{[1+aD_t(\tau)]\,[1+aD_x(\xi)]-a^2D_x(\tau)D_t(\xi)+O(a^2)}=\frac{-aD_x(\tau)+O(a^2)}{1+a\,[D_t(\tau)+D_x(\xi)]+O(a^2)}. \end{aligned}$$

利用几何级数 $\frac{1}{1-x}=1-x+x^2-\cdots,|x|<1$，将上式展开，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}&=\left[1+aD_t(\tau)+O(a^2)\right]\left\{1-a\,[D_t(\tau)+D_x(\xi)]+O(a^2)\right\}=1-aD_x(\xi)+O(a^2),\\ \frac{\partial t}{\partial \bar{x}}&=\left[-aD_x(\tau)+O(a^2)\right]\left\{1-a\,[D_t(\tau)+D_x(\xi)]+O(a^2)\right\}=-aD_x(\tau)+O(a^2). \end{aligned} \tag{3.16}$$

同理，再将 (3.14a) 和 (3.14b) 的两端分别对 $\bar{t}$ 求导数，按照上面的步骤可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}}&=1-aD_t(\tau)+O(a^2),\\ \frac{\partial x}{\partial \bar{t}}&=-aD_t(\xi)+O(a^2). \end{aligned} \tag{3.17}$$

然后求 $\bar{u}(\bar{t},\bar{x})$ 关于 $\bar{t},\bar{x}$ 的各阶导数。

先求一阶偏导数 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$ ，由 (3.14c) 和上面几个导数结果 (3.16)，(3.17) 可以得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{t}} \\
&= D_t(u + a\eta)[1 - aD_t(\tau)] + D_x(u + a\eta)[-aD_t(\xi)] + O(a^2) \\
&= u_t + a[D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi)] + O(a^2) \\
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{x}} \\
&= D_x(u + a\eta)[1 - aD_x(\xi)] + D_t(u + a\eta)[-aD_x(\tau)] + O(a^2) \\
&= u_x + a[D_x(\eta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\tau)] + O(a^2)
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

记 $\kappa_1 = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi), \zeta_1 = D_x(\eta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\tau)$ 则 (3.18) 可简写为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= u_t + a\kappa_1 + O(a^2), \\
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} &= u_x + a\zeta_1 + O(a^2).
\end{aligned}
$$

接下来求 $\bar{u}(\bar{t}, \bar{x})$ 的二阶偏导数，考虑到 $x$ 与 $t$ 的等价性，下面的偏导数运算以 $x$ 为例，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial t}{\partial \bar{x}} \\
&= D_x(\bar{u}_{\bar{x}})[1 - aD_x(\xi)] + D_t(\bar{u}_{\bar{t}})[-aD_x(\tau)] + O(a^2) \\
&= D_x(u_x + a\zeta_1)[1 - aD_x(\xi)] + D_t(u_x + a\zeta_1)[-aD_x(\tau)] + O(a^2) \\
&= u_{xx} + a[D_x(\zeta_1) - u_{xx} D_x(\xi) - u_{xt} D_x(\tau)] + O(a^2)
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

同记 $\zeta_2 = D_x(\zeta_1) - u_{xx} D_x(\xi) - u_{xt} D_x(\tau)$ 则 (3.19) 简写为

$$
\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = u_{xx} + a\zeta_2 + O(a^2)
$$

根据以上的运算的规律，我们利用数学归纳法来求解 $\bar{u}(\bar{t}, \bar{x})$ 关于 $\bar{x}$ 的第 $n+1$ 阶偏导数，先假设 $\bar{u}(\bar{t}, \bar{x})$ 有关于 $\bar{x}$ 的第 $n$ 阶偏导数

$$
\frac{\partial^n \bar{u}}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a\zeta_n + O(a^2) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a[D_x(\zeta_{n-1}) - \frac{\partial^n}{\partial x^n} D_x(\xi) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} D_x(\tau)] + O(a^2)
$$

接下来看其关于 $\bar{x}$ 第 $n+1$ 阶偏导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1} \bar{u}}{\partial \bar{x}^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial^n \bar{u}}{\partial \bar{x}^n}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n \bar{u}}{\partial \bar{x}^n}\right)\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^n \bar{u}}{\partial \bar{x}^n}\right)\frac{\partial t}{\partial \bar{x}} \\
&= D_x\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a\zeta_n\right)[1 - aD_x(\xi)] + D_t\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a\zeta_n\right)[-aD_x(\tau)] + O(a^2) \\
&= \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} + a[D_x(\zeta_n) - \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} D_x(\xi) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n} D_x(\tau)] + O(a^2) \\
&= \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} + a\zeta_{n+1} + O(a^2)
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

同理可得 $\bar{u}(\bar{t},\bar{x})$ 关于 $\bar{x}$ 的第 $n+1$ 阶偏导数如下

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1}\bar{u}}{\partial\bar{t}^{n+1}} &= \frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n+1}} + a[D_t(\kappa_n) - \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}D_t(\tau) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n u}{\partial t^n}D_t(\xi)] + O(a^2) \\
&= \frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n+1}} + a\kappa_{n+1} + O(a^2)
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

因此，由 (3.20) 和 (3.21) 可以获得 $\bar{u}(\bar{t},\bar{x})$ 各阶偏导数的无穷小形式

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{\bar{x}} &\approx u_x + a\zeta_1(t,x,u,u_t,u_x), \\
\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} &\approx u_{xx} + a\zeta_2(t,x,u,u_t,u_x,u_{xt},u_{xx}), \\
&\vdots \\
\frac{\partial^n\bar{u}}{\partial\bar{x}^n} &\approx \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a\zeta_n(t,x,u,u_t,u_x,\cdots) \\
\bar{u}_{\bar{t}} &\approx u_t + a\kappa_1(t,x,u,u_t,u_x), \\
\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}} &\approx u_{tt} + a\kappa_2(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{tt}), \\
&\vdots \\
\frac{\partial^n\bar{u}}{\partial\bar{t}^n} &\approx \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + a\kappa_n(t,x,u,u_t,u_x,\cdots)
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

其中 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 由下面的 **延拓公式** 决定：

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\tau), \\
\zeta_2 &= D_x(\zeta_1) - u_{xx}D_x(\xi) - u_{xt}D_x(\tau), \\
&\vdots \\
\zeta_n &= D_x(\zeta_{n-1}) - \frac{\partial^n u}{\partial x^n}D_x(\xi) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}D_x(\tau). \\
\kappa_1 &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi), \\
\kappa_2 &= D_t(\kappa_1) - u_{tt}D_t(\tau) - u_{tx}D_t(\xi), \\
&\vdots \\
\kappa_n &= D_t(\kappa_{n-1}) - \frac{\partial^n u}{\partial t^n}D_t(\tau) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}}D_t(\xi).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

并且 $D_t$ 和 $D_x$ 是关于 $t$ 和 $x$ 的全微分：

$$
\begin{aligned}
D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + u_{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \cdots, \\
D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{ttx}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + u_{xtx}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \cdots.
\end{aligned}
$$

### 3.3.3 三次发展方程的确定方程

把 (3.12) 和 (3.22) 代入方程 (3.11) 得到

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{\bar{t}} - F(\bar{t},\bar{x},\bar{u},\bar{u}_{\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) \approx{}& u_t - F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx}) \\
&+ a\left(\kappa_1 - \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}}\zeta_3 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\tau\right).
\end{aligned}
$$

因此，由方程 (3.9)，方程 (3.11) 变为

$$\kappa_1 - \frac{\partial F}{\partial u_{xxx}}\zeta_3 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\zeta_2 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\zeta_1 - \frac{\partial F}{\partial u}\eta - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial t}\tau = 0, \tag{3.24}$$

其中 $u_t$ 由关于 $\kappa_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 的 $F(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ 取代。

方程 (3.24) 定义了方程 (3.11) 的所有无穷小对称。它们称为 **确定方程** 。通常可以用缩写形式

$$X\left[u_t - F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx})\right] = 0,$$

其中 $X$ 表示算子 (3.13) 至一阶、二阶和三阶微分的延拓：

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \kappa_1\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_3\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}.$$

确定方程 (3.24) 是一个关于未知函数 $\tau(t, x, u), \xi(t, x, u), \eta(t, x, u)$ 的二阶线性齐次偏微分方程。

## 3.4 简化确定方程求解过程计算的定理

对于大量的 PDE (3.1)，在建立和求解无穷小 $\xi(x, u), \eta(x, u)$ 的确定方程时，确定方程 (3.24) 或 (3.8) 对 $x, u, \partial u, \partial^2, \cdots, \partial^k u$ 等自变量是等同的，所以可将确定方程分解为一个超定方程组。尽管求解这个方程组就可以得到显式解，但计算过程相当复杂。因此，需借助下面的几个结论来简化确定方程：

**引理 3.1** 对于方程 (3.9)，对称变换 (3.10) 有形式

$$\bar{t} = f(t, a), \quad \bar{x} = g(t, x, u, a), \quad \bar{u} = h(t, x, u, a),$$

这样意味着可以找到无穷小对称的形式

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.25}$$

**证明** 我们挑选出 (3.24) 中包含 $u_{tx}$ 的项。从延拓方程 (3.23) 可以看出只有 $\zeta_2, \zeta_3$ 分别包含 $u_{tx}, u_{txx}$ ，即它们的项 $u_{tx}D_x(\tau), u_{txx}D_x(\tau)$。因为方程 (3.24) 对于 $t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{tx}, u_{txx}, u_{xxx}$ 都成立，我们有 $D_x(\tau) \equiv \tau_x + u_x\tau_u = 0$ 。因此 $\tau_x = \tau_u = 0$ ，即 $\tau = \tau(t)$，并且算子 (3.13) 有 (3.25) 的形式。 □

**定理 3.2** 假设 $k \geqslant 2$，假设 PDE (3.6) 是齐次线性 PDE，它拥有 Lie 点变换群且无穷小生成元 (3.7)，则有

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad i = 2, \cdots, n, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0. \tag{3.26}$$

# 第四章　几类方程及利用 Lie 对称方法求解

目前，在现代数学物理分支以及其他学科中，越来越多的问题均采用合适的非线性模型来描述 [34] 。因此，采用不同的方法求解非线性学科中的非线性发展方程的显示解和精确解 (尤其是孤波解) 十分重要且很有必要。这些方法包括但不限于齐次平衡法 (Homogeneous Balance Method)，tanh 函数法，sech 函数法，正余弦法，试验函数法 (trial function method)，雅可比椭圆函数法，映射法等等。然而，以上所有的方法并不都能直接有效地求解所有类型的非线性发展方程。本章将介绍三个在物理非线性发展方程方面广为人知的方程：Burgers 方程，KdV 方程和 KdV-Burgers 方程及其广义的形式。这几个方程不仅源于真实的物理现象，同时也被广泛用于许多物理领域，如等离子体物理，流体动力学，晶格理论 (Crystal Lattice Theory)，非线性电流理论，天体物理。随后，本文将 Lie 对称方法求解这三个方程以及其推广后的方程。

## 4.1　Lie 对称方法解法简介

用 Lie 对称群方法求解微分方程的主要步骤如图 1 所示。

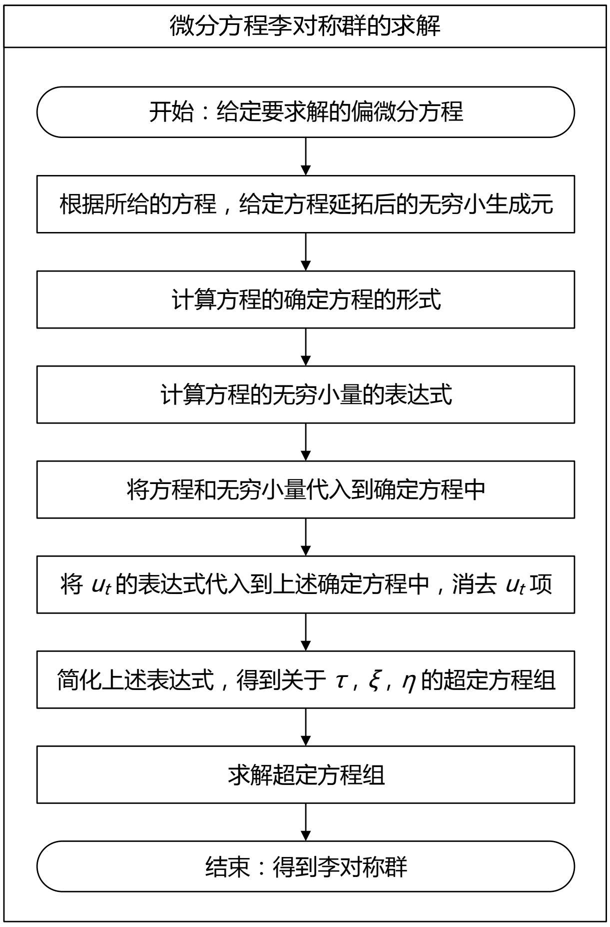


图 1: 运用李对称群方法求解微分方程

## 4.2 Burgers 方程

### 4.2.1 Burgers 方程简介

Burgers 方程被认为是流体力学中最基础的模型方程之一，该方程描述的是耦合的扩散与对流过程 [33, 16]。

Burgers 方程的标准形式如下：

$$u_t = uu_x + \nu u_{xx}, \quad t > 0$$

其中 $\nu$ 是常数，该常数定义的是动力粘性指数，其变量 $x$ 是以声波速度移动的坐标，并设因变量 $u$ 代表速度波动。若粘性指数 $\nu = 0$，则方程为非粘性 Burgers 方程，其表示气体动力学的状态。非粘性 Burgers 方程是流体力学中结合扩散与对流的偏微分方程中形式最简单的一个。该方程是 J.M. Burgers 在文献 [9] 中描述因对流与扩散的反作用引起的管道中混沌流体的特征时引入，同时该方程也可用于描述怪波，交通流，声学传播结构 (非线性声学领域) 。例如，它被用于非平面冲击波的形成和衰变的建模。目前为止，大量关于 Burgers 方程的研究正在进行，根据现有的研究成果，可以通过不同的方法得到若干个精确解。

在 Burgers 方程里的系数$\nu$ 经常被认为是常数。然而，实际上，它是关于时间的函数，因此研究如下广义 Burgers 方程是更有意义的 [16]：

$$u_t = uu_x + \nu(t)u_{xx}.$$

Burgers 方程在其他文献中可见的形式还有

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad t > 0, \\ u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \\ u_t + uu_x = \alpha u_{xx}. \end{cases}$$

以下为变形的 Burgers 方程 (modified Burgers Equation, mBurgers)，

$$u_t = u^n u_x + \nu u_{xx}, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad \nu = \text{const}, \quad t > 0 \tag{4.1}$$

当 $n = 1$ 时，上式即为 Burgers 方程。

### 4.2.2 mBurgers 方程的求解

下面我们以求解 mBurgers 方程 (4.1) 为例，来阐述用 Lie 对称方法求解偏微分方程的步骤。

由定理 3.1 可知，mBurgers 方程 (4.1) 的点对称拥有形如 (3.3) 的无穷小生成元：

$$X = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

其二阶延拓无穷小生成元为

$$\begin{aligned} X^{(2)} = {} & \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \kappa_1(t,x,u,u_t,u_x)\frac{\partial}{\partial u_t} \\ & + \zeta_1(t,x,u,u_t,u_x)\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2(t,x,u,u_t,u_x,u_{xt},u_{xx})\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \end{aligned}$$

其中 $\kappa_1,\zeta_1,\zeta_2$ 由 (3.23) 给定。

由对称确定方程 (3.8) 可得，mBurgers 方程 (4.1) 的确定方程形式为

$$\kappa_1-\zeta_1 u^n-\nu\zeta_2-\eta n u^{n-1}u_x=0 \tag{4.2}$$

将 (A.1) 代入到上式 (4.2) 得

$$\begin{aligned}&-u_xu^n\eta_u-nu_xu^{n-1}\eta+u_x^2u^n\xi_u+u_xu^n\xi_x+u_xu_tu^n\tau_u+u_tu^n\tau_x-u^n\eta_x-\nu u_{xx}\eta_u\\&\quad-\nu u_x^2\eta_{uu}-2\nu u_x\eta_{xu}+u_t\eta_u+3\nu u_xu_{xx}\xi_u+\nu u_x^3\xi_{uu}+2\nu u_{xx}\xi_x+2\nu u_x^2\xi_{xu}\\&\quad+\nu u_x\xi_{xx}+\nu u_{xx}u_t\tau_u+2\nu u_xu_{tx}\tau_u+\nu u_x^2u_t\tau_{uu}+2\nu u_{tx}\tau_x+2\nu u_xu_t\tau_{xu}\\&\quad+\nu u_t\tau_{xx}-u_xu_t\xi_u-u_x\xi_t-u_t^2\tau_u-u_t\tau_t-\nu\eta_{xx}+\eta_t=0\end{aligned}$$

再将 (4.1) 代入到上式中消去 $u_t$ 项并合并同类项得

$$\begin{aligned}&u_x^2(2\nu u^n\tau_{xu}+\nu^2u_{xx}\tau_{uu}-\nu\eta_{uu}+2\nu\xi_{xu})+u_x(-nu^{n-1}\eta+\nu u^n\tau_{xx}+u^n\xi_x-u^n\tau_t\\&\quad+u^{2n}\tau_x+u_{xx}(2\nu^2\tau_{xu}+2\nu\xi_u)+2\nu u_{tx}\tau_u-2\nu\eta_{xu}+\nu\xi_{xx}-\xi_t)\\&\quad+u_{xx}(\nu u^n\tau_x+\nu^2\tau_{xx}+2\nu\xi_x-\nu\tau_t)+u_x^3(\nu u^n\tau_{uu}+\nu\xi_{uu})\\&\quad+u^n(-\eta_x)+2\nu u_{tx}\tau_x-\nu\eta_{xx}+\eta_t=0\end{aligned}$$

注意到上式仍然相当复杂，为了简化计算，利用 Lie 的研究成果，可根据引理 3.1 可得 $\tau(t,x,u)=\tau(t)$，于是上式可简化为

$$\begin{aligned}&u_x(-nu^{n-1}\eta+u^n\xi_x-\tau'u^n+2\nu u_{xx}\xi_u-2\nu\eta_{xu}+\nu\xi_{xx}-\xi_t)+u^n(-\eta_x)\\&\quad+u_x^2(2\nu\xi_{xu}-\nu\eta_{uu})+u_{xx}(2\nu\xi_x-\nu\tau')+\nu u_x^3\xi_{uu}-\nu\eta_{xx}+\eta_t=0\end{aligned} \tag{4.3}$$

对称确定方程 (4.3) 对于 $x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xxx}$ 的所有的一定成立。因而，令 $u_{xxx},u_{xx},u_x,u$ 的系数为零，获得以下关于 $\tau,\xi,\eta$ 的超定方程组：

$$u_x:\quad -n\eta u^{n-1}-\tau'u^n+\xi_xu^n-2\nu\eta_{xu}+\nu\xi_{xx}-\xi_t=0 \tag{4.4a}$$
$$u_x^2:\quad 2\nu\xi_{xu}-\nu\eta_{uu}=0 \tag{4.4b}$$
$$u_x^3:\quad \nu\xi_{uu}=0 \tag{4.4c}$$
$$u_xu_{xx}:\quad 2\nu\xi_u=0 \tag{4.4d}$$
$$u_{xx}:\quad -\nu\tau'+2\nu\xi_x=0 \tag{4.4e}$$
$$\text{常数项}:\quad -\eta_xu^n-\nu\eta_{xx}+\eta_t=0 \tag{4.4f}$$

由 (4.4e) 可得 $\xi_x=\frac{1}{2}\tau'$，因此，(4.4b) 式化为 $2\nu\cdot 0-\nu\eta_{uu}=0\Rightarrow\eta_{uu}=0$，于是超定方程组 (4.4) 可简化为：

$$u_xu_{xx}:\quad \xi_u=0 \tag{4.5a}$$
$$u_{xx}:\quad \xi_x=\frac{\tau'}{2} \tag{4.5b}$$
$$u_x^2:\quad \eta_{uu}=0 \tag{4.5c}$$
$$u_x:\quad -n\eta u^{n-1}-\tau'u^n+\xi_xu^n-2\nu\eta_{xu}-\xi_t=0 \tag{4.5d}$$
$$\text{常数项}:\quad -\eta_xu^n-\nu\eta_{xx}+\eta_t=0 \tag{4.5e}$$

由 (4.5a)、(4.5b) 和 (4.5c) 可知，$\xi=\xi(t,x)$，$\eta_u=\eta_u(t,x)$，所以分别设

$$\xi=\frac{1}{2}\tau'(t)x+p(t) \tag{4.6a}$$

$$\eta=\sigma(t,x)u+\lambda(t,x) \tag{4.6b}$$

将式 (4.6) 代入 (4.5d) 和 (4.5e)，整理后得

$$\begin{cases} -u^n(n\sigma+\frac{1}{2}\tau')-nu^{n-1}\lambda-2\nu\sigma_x-\frac{1}{2}\tau''x-p'=0 \\ -u^{n+1}\sigma_x-\lambda_x u^n-\nu(\sigma_{xx}u+\lambda_{xx})+\sigma_t u+\lambda_t=0 \end{cases} \tag{4.7}$$

**情形 1　当 $n=1$ 时。** 上式 (4.7) 变为

$$-u(\sigma+\frac{1}{2}\tau')-(\lambda+2\nu\sigma_x+\frac{1}{2}\tau''x+p')=0 \tag{4.8a}$$

$$-u^2\sigma_x-\lambda_x u-\nu(\sigma_{xx}u+\lambda_{xx})+\sigma_t u+\lambda_t=0 \tag{4.8b}$$

由 (4.8a) 解得

$$\begin{aligned} \sigma&=-\frac{1}{2}\tau' \\ \lambda&=-\frac{1}{2}\tau''x-p' \end{aligned} \tag{4.9}$$

将上式 (4.9) 代入到 (4.8b) 得 $-\frac{1}{2}\tau'''x-p''=0$，再令 $\tau'''(t)=0,\quad p''(t)=0$ 可以求得

$$\begin{matrix} \tau=C_1t^2+C_2t+C_3 \\ p=C_4t+C_5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma=-C_1t-\frac{1}{2}C_2 \\ \lambda=-C_1x-C_4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \tau=C_1t^2+C_2t+C_3 \\ \xi=C_1tx+C_2x+C_4t+C_5 \\ \eta=-(C_1t-\frac{1}{2}C_2)u-C_1x-C_4 \end{matrix}$$

故其点对称为

$$\begin{aligned} &X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_3=t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_4=t^2\frac{\partial}{\partial t}+xt\frac{\partial}{\partial x}-(ut+x)\frac{\partial}{\partial u},\quad X_5=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

**情形 2　当 $n\geqslant 2$ 时。** 可以解得

$$\begin{matrix} \sigma=-\frac{1}{2n}\tau'(t) \\ \lambda=0 \\ \tau''=0 \\ p'=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \tau=C_1t+C_2 \\ p=C_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma=-\frac{1}{2n}C_1 \\ \lambda=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \tau=C_1t+C_2 \\ \xi=\frac{1}{2}C_1x+C_3 \\ \eta=-\frac{1}{2n}C_1u \end{matrix}$$

故其点对称为

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_3=t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{u}{2n}\frac{\partial}{\partial u}.$$

## 4.3 KdV 方程

### 4.3.1 Korteweg-de Vries (KdV) 方程简介

KdV 方程是描述浅水波表面的模型，作为精确可解的模型的原型例子。其特殊之处在于，作为非线性偏微分方程，它的解可以被精确或明确表示，KdV 方程可通过逆散点变换 (Inverse Scattering Transform) 得到解。KdV 方程所蕴含的数学理论现正是一个被广泛研究的热门话题，例如 [16] 该方程常常被用于描述通道里长水波的传播。KdV 方程最初由 Boussinesq 于 1877 年引出 [2]，直到 1895 年被荷兰著名数学家 Korteweg (科特维格) 和他的学生 G.de Vries (德佛累斯) 在研究浅水波的运动时重新发现。

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

KdV 方程有如下更一般的形式

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0, \tag{4.10}$$

其中 $u = u(t,x)$ 是动力学量，而 $a$ 和 $b$ 是不为零的常数。我们可以通过标度变换使 $u_{xxx}$ 项或 $uu_x$ 项前面的系数有常数倍的改变。例如，变换 $x \to b^{1/3}x$，将 (4.10) 变为

$$u_t + ab^{1/3}uu_x + u_{xxx} = 0,$$

变换 $t \to -t$，又将上述方程变换为

$$u_t - ab^{1/3}uu_x - u_{xxx} = 0,$$

变换 $u \to a^{-1}b^{1/3}u$，又将上述方程变换为

$$u_t - uu_x - \mu u_{xxx} = 0,$$

KdV 方程常见的形式还有

$$\begin{cases} u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \\ u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \end{cases}$$

等等。

重要的是，标度变换并不改变方程的基本性质。

以下推广得到的广义的 KdV 方程 (Generalized KdV Equation, GKdV)，

$$u_t = u^n u_x + \mu u_{xxx}, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad t > 0 \tag{4.11}$$

同样容易发现，当 $n = 1$ 时，上式即为 KdV 方程。

### 4.3.2 GKdV 方程的求解

GKdV 方程 (4.11) 的求解与 mBurgers 方程 (4.1) 的求解类似。

由定理 3.1 可知，GKdV 方程 (4.11) 的点对称拥有形如 (3.3) 的无穷小生成元：

$$X=\tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t}+\xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

其三阶延拓无穷小生成元为

$$\begin{aligned}X^{(2)}=\tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t}+\xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}.+\kappa_1(t,x,u,u_t,u_x)\frac{\partial}{\partial u_t}\\+\zeta_1(t,x,u,u_t,u_x)\frac{\partial}{\partial u_x}+\zeta_3(t,x,u,u_t,u_x,u_{xt},u_{xx},u_{xxt},u_{xxx})\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}\end{aligned}$$

其中 $\kappa_1,\zeta_1,\zeta_3$ 由 (3.23) 给定。

由确定方程 (3.24) 可得，GKdV 方程 (4.11) 的确定方程形式为

$$\kappa_1-\zeta_1u^n-\mu\zeta_3-\eta nu^{n-1}u_x=0 \tag{4.12}$$

将 (A.1) 代入到上式 (4.12) 得

$$\begin{aligned}&-n\eta u_xu^{n-1}-u_x\eta_uu^n+u_x^2\xi_uu^n+u_xu_t\tau_uu^n-\eta_xu^n+u_x\xi_xu^n+u_t\tau_xu^n-\mu u_{xxx}\eta_u\\&+u_t\eta_u+3\mu u_{xx}^2\xi_u+4\mu u_xu_{xxx}\xi_u-u_xu_t\xi_u-u_t^2\tau_u+\mu u_{xxx}u_t\tau_u\\&+3\mu u_{xx}u_{tx}\tau_u+3\mu u_xu_{txx}\tau_u-3\mu u_xu_{xx}\eta_{uu}+6\mu u_x^2u_{xx}\xi_{uu}\\&+3\mu u_xu_{xx}u_t\tau_{uu}+3\mu u_x^2u_{tx}\tau_{uu}-\mu u_x^3\eta_{uuu}+\mu u_x^4\xi_{uuu}+\mu u_x^3u_t\tau_{uuu}\\&+3\mu u_{xxx}\xi_x+3\mu u_{txx}\tau_x-3\mu u_{xx}\eta_{xu}+9\mu u_xu_{xx}\xi_{xu}+3\mu u_{xx}u_t\tau_{xu}\\&+6\mu u_xu_{tx}\tau_{xu}-3\mu u_x^2\eta_{xuu}+3\mu u_x^3\xi_{xuu}+3\mu u_x^2u_t\tau_{xuu}+3\mu u_{xx}\xi_{xx}\\&+3\mu u_{tx}\tau_{xx}-3\mu u_x\eta_{xxu}+3\mu u_x^2\xi_{xxu}+3\mu u_xu_t\tau_{xxu}-\mu\eta_{xxx}+\mu u_x\xi_{xxx}\\&+\mu u_t\tau_{xxx}+\eta_t-u_x\xi_t-u_t\tau_t=0\end{aligned}$$

再将 (4.11) 代入到上式中消去 $u_t$ 项并合并同类项得

$$\begin{aligned}&u_x^3(3\mu u^n\tau_{xuu}+\mu^2u_{xxx}\tau_{uuu}-\mu\eta_{uuu}+3\mu\xi_{xuu})+u_x^2(u_{xx}(3\mu u^n\tau_{uu}+6\mu\xi_{uu})\\&+3\mu u^n\tau_{xxu}+3\mu^2u_{xxx}\tau_{xuu}+3\mu u_{tx}\tau_{uu}-3\mu\eta_{xuu}+3\mu\xi_{xxu})\\&+u_x(u_{xx}(3\mu u^n\tau_{xu}+3\mu^2u_{xxx}\tau_{uu}-3\mu\eta_{uu}+9\mu\xi_{xu})-nu^{n-1}\eta+\mu u^n\tau_{xxx}\\&+u^n\xi_x-u^n\tau_t+u^{2n}\tau_x+u_{xxx}(3\mu^2\tau_{xxu}+3\mu\xi_u)+3\mu u_{txx}\tau_u+6\mu u_{tx}\tau_{xu}\\&-3\mu\eta_{xxu}+\mu\xi_{xxx}-\xi_t)+u_{xxx}(\mu u^n\tau_x+\mu^2\tau_{xxx}+3\mu\xi_x-\mu\tau_t)\\&+u_x^4(\mu u^n\tau_{uuu}+\mu\xi_{uuu})+u_{xx}(3\mu^2u_{xxx}\tau_{xu}+3\mu u_{tx}\tau_u-3\mu\eta_{xu}+3\mu\xi_{xx})\\&+u^n(-\eta_x)+3\mu u_{xx}^2\xi_u+3\mu u_{txx}\tau_x+3\mu u_{tx}\tau_{xx}-\mu\eta_{xxx}+\eta_t=0\end{aligned}$$

注意到上式仍然相当复杂，为了简化计算，利用 Lie 的研究成果，可根据引理 3.1 可得 $\tau(t,x,u)=\tau(t)$，于是上式可简化为

$$\begin{aligned}&-\eta_xu^n+3\mu u_{xx}^2\xi_u+\mu u_x^4\xi_{uuu}+u_{xxx}(3\mu\xi_x-\mu\tau')+u_x^3(3\mu\xi_{xuu}-\mu\eta_{uuu})\\&+u_{xx}(3\mu\xi_{xx}-3\mu\eta_{xu})+u_x^2(6\mu u_{xx}\xi_{uu}-3\mu\eta_{xuu}+3\mu\xi_{xxu})\\&+u_x(-n\eta u^{n-1}-\tau'u^n+\xi_xu^n+3\mu u_{xxx}\xi_u-3\mu\eta_{xxu}+\mu\xi_{xxx}-\xi_t)\\&+u_xu_{xx}(9\mu\xi_{xu}-3\mu\eta_{uu})-\mu\eta_{xxx}+\eta_t=0\end{aligned}$$

对称确定方程 (4.3.2) 对于 $x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xxx}$ 的所有的一定成立。因而，令 $u_{xxx},u_{xx},u_x,u$ 的系数为零，获得以下关于 $\tau,\xi,\eta$ 的超定方程组：

$$
\begin{aligned}
u_x:&\quad -n\eta u^{n-1}-\tau' u^n+\xi_x u^n-3\mu\eta_{xxu}+\mu\xi_{xxx}-\xi_t=0 &\text{(4.13a)}\\
u_x^2:&\quad -3\mu\eta_{xuu}+3\mu\xi_{xxu}=0 &\text{(4.13b)}\\
u_x^3:&\quad 3\mu\xi_{xuu}-\mu\eta_{uuu}=0 &\text{(4.13c)}\\
u_x^4:&\quad \mu\xi_{uuu}=0 &\text{(4.13d)}\\
u_xu_{xxx}:&\quad 3\mu\xi_u=0 &\text{(4.13e)}\\
u_x^2u_{xx}:&\quad 6\mu\xi_{uu}=0 &\text{(4.13f)}\\
u_xu_{xx}:&\quad 9\mu\xi_{xu}-3\mu\eta_{uu}=0 &\text{(4.13g)}\\
u_{xx}:&\quad -3\mu\eta_{xu}+3\mu\xi_{xx}=0 &\text{(4.13h)}\\
u_{xx}^2:&\quad 3\mu\xi_u=0 &\text{(4.13i)}\\
u_{xxx}:&\quad -\mu\tau'+3\mu\xi_x=0 &\text{(4.13j)}\\
\text{常数项}:&\quad -\eta_x u^n-\mu\eta_{xxx}+\eta_t=0 &\text{(4.13k)}
\end{aligned}
$$

由 (4.13j) 可得 $\xi_x=\frac{1}{3}\tau'$，因此，(4.13g) 式化为 $9\mu\cdot 0-3\mu\eta_{uu}=0\Rightarrow\eta_{uu}=0$，于是超定方程组 (4.13) 可简化为：

$$
\begin{aligned}
u_x^2:&\quad \xi_u=0 &\text{(4.14a)}\\
u_{xxx}:&\quad \xi_x=\frac{\tau'}{3} &\text{(4.14b)}\\
u_xu_{xx}:&\quad \eta_{uu}=0 &\text{(4.14c)}\\
u_{xx}:&\quad \eta_{xu}=0 &\text{(4.14d)}\\
u_x:&\quad -n\eta u^{n-1}-\tau' u^n+\xi_x u^n-\xi_t=0 &\text{(4.14e)}\\
\text{常数项}:&\quad -\eta_x u^n-\mu\eta_{xxx}+\eta_t=0 &\text{(4.14f)}
\end{aligned}
$$

由 (4.14a)、(4.14b) 和 (4.14c)、(4.14d) 可知，$\xi=\xi(t,x)$，$\eta_u=\eta_u(t)$ 所以分别设

$$\xi=\frac{1}{3}\tau'(t)x+p(t) \tag{4.15a}$$

$$\eta=\sigma(t)u+\lambda(t,x) \tag{4.15b}$$

将式 (4.15) 代入 (4.14e) 和 (4.14f)，整理后得

$$
\begin{aligned}
&-u^n(n\sigma+\frac{2}{3}\tau')-nu^{n-1}\lambda-\frac{1}{3}\tau''x-p'=0\\
&-\lambda_x u^n-\mu\lambda_{xxx}+\sigma' u+\lambda_t=0
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

**情形 1　当 $n=1$ 时。** 上式 (4.16) 可简化为

$$-u(\sigma+\frac{2}{3}\tau')-(\lambda+\frac{1}{3}\tau''x+p')=0 \tag{4.17a}$$

$$-\lambda_x u-\mu\lambda_{xxx}+\sigma' u+\lambda_t=0 \tag{4.17b}$$

由 (4.17a) 解得

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{2}{3}\tau' \\ \lambda &= -\frac{1}{3}\tau'' x - p' \end{aligned} \tag{4.18}$$

将上式 (4.18) 代入到 (4.17b) 得 $-\frac{1}{3}\tau'' u - \mu \cdot 0 - \frac{2}{3}\tau'' u - \frac{1}{3}\tau''' x - p'' = 0$，再令 $\tau''(t) = 0, \quad p''(t) = 0$ 可以求得所以

$$\begin{aligned} \tau &= C_1 t + C_2 \\ p &= C_3 t + C_4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma &= -\frac{2}{3}C_1 \\ \lambda &= -C_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \tau &= C_1 t + C_2 \\ \xi &= \frac{1}{3}C_1 x + C_3 t + C_4 \\ \eta &= -\frac{2}{3}C_1 u - C_3 \end{aligned}$$

故其点对称为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2u}{3}\frac{\partial}{\partial u}.$$

**情形 2　当 $n \geqslant 2$ 时。** 可以解得

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{2}{3n}\tau'(t) \\ \lambda &= 0 \\ \tau'' &= 0 \\ p' &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \tau &= C_1 t + C_2 \\ p &= C_3 \\ \sigma &= -\frac{2}{3n}C_1 \\ \lambda &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \tau &= C_1 t + C_2 \\ \xi &= \frac{1}{3}C_1 x + C_3 \\ \eta &= -\frac{2}{3n}C_1 u \end{aligned}$$

故其点对称为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2u}{3n}\frac{\partial}{\partial u}.$$

## 4.4　KdV-Burgers 方程

### 4.4.1　KdV-Burgers 方程简介

KdV-Burgers 方程是描述的是液体内含有气泡流动以及弹性管内液体流动的数学模型 [2, 1]，一般形式是

$$u_t = uu_x + \nu u_{xx} + \mu u_{xxx},$$

其中 $\nu, \mu \neq 0$，分别为耗散项和色散项系数。

若 $\mu = 0, \nu \neq 0$，则方程即为著名的 KdV 方程；若 $\mu \neq 0, \nu = 0$，则方程为 Burgers 方程。我们知道 KdV 方程和 Burgers 方程都是可积的，但 KdV-Burgers 方程不可积 [3]。

KdV-Burgers 方程还用于描述许多物理背景的问题，如浅水管道中波的传播，有耗散作用的非线性弱离子波，铁电理论 (Theory of Ferro Electricity)，非线性电流，在充满粘性液体弹性管道中波的传播 [33]。

KdV-Burgers 方程在其他文献中可见的形式还有

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0 \\ u_t + uu_x + \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0 \end{cases}$$

以下为广义的 KdV-Burgers 方程 (Generalized KdV-Burgers Equation, GKdV-Burgers)，

$$u_t = u^n u_x + \nu u_{xx} + \mu u_{xxx}, \quad \nu, \mu = \text{const} \tag{4.19}$$

容易发现，当 $n = 1$ 时，上式即为 KdV-Burgers 方程。

### 4.4.2 GKdV-Burgers 方程的求解

由定理 3.1 可知，GKdV 方程 (4.19) 的点对称拥有形如 (3.3) 的无穷小生成元：

$$X = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

其三阶延拓无穷小生成元为

$$\begin{aligned} X^{(2)} = {} & \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}. + \kappa_1(t,x,u,u_t,u_x)\frac{\partial}{\partial u_t} \\ & + \zeta_1(t,x,u,u_t,u_x)\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx},u_{xt})\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \\ & + \zeta_3(t,x,u,u_t,u_x,u_{xt},u_{xx},u_{xxt},u_{xxx})\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \end{aligned}$$

其中 $\kappa_1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 由 (3.23) 给定。

由确定方程 (3.24) 可得，GKdV 方程 (4.19) 的确定方程形式为

$$\kappa_1 - \zeta_1 u^n - \nu\zeta_2 - \mu\zeta_3 - \eta n u^{n-1} u_x = 0 \tag{4.20}$$

将 (A.1) 代入到上式 (4.20) 得

$$\begin{aligned} -n\eta u_x u^{n-1} & - u_x\eta_u u^n + u_x^2\xi_u u^n + u_x u_t \tau_u u^n - \eta_x u^n + u_x\xi_x u^n + u_t\tau_x u^n - \nu u_{xx}\eta_u \\ & - \mu u_{xxx}\eta_u + u_t\eta_u + 3\mu u_{xx}^2\xi_u + 3\nu u_x u_{xx}\xi_u + 4\mu u_x u_{xxx}\xi_u - u_x u_t\xi_u \\ & - u_t^2\tau_u + \nu u_{xx}u_t\tau_u + \mu u_{xxx}u_t\tau_u + 2\nu u_x u_{tx}\tau_u + 3\mu u_{xx}u_{tx}\tau_u + 3\mu u_x u_{txx}\tau_u \\ & - \nu u_x^2\eta_{uu} - 3\mu u_x u_{xx}\eta_{uu} + \nu u_x^3\xi_{uu} + 6\mu u_x^2 u_{xx}\xi_{uu} + \nu u_x^2 u_t\tau_{uu} \\ & + 3\mu u_x u_{xx}u_t\tau_{uu} + 3\mu u_x^2 u_{tx}\tau_{uu} - \mu u_x^3\eta_{uuu} + \mu u_x^4\xi_{uuu} + \mu u_x^3 u_t\tau_{uuu} \\ & + 2\nu u_{xx}\xi_x + 3\mu u_{xxx}\xi_x + 2\nu u_{tx}\tau_x + 3\mu u_{txx}\tau_x - 2\nu u_x\eta_{xu} - 3\mu u_{xx}\eta_{xu} \\ & + 2\nu u_x^2\xi_{xu} + 9\mu u_x u_{xx}\xi_{xu} + 2\nu u_x u_t\tau_{xu} + 3\mu u_{xx}u_t\tau_{xu} + 6\mu u_x u_{tx}\tau_{xu} \\ & - 3\mu u_x^2\eta_{xuu} + 3\mu u_x^3\xi_{xuu} + 3\mu u_x^2 u_t\tau_{xuu} - \nu\eta_{xx} + \nu u_x\xi_{xx} + 3\mu u_{xx}\xi_{xx} \\ & + \nu u_t\tau_{xx} + 3\mu u_{tx}\tau_{xx} - 3\mu u_x\eta_{xxu} + 3\mu u_x^2\xi_{xxu} + 3\mu u_x u_t\tau_{xxu} - \mu\eta_{xxx} \\ & + \mu u_x\xi_{xxx} + \mu u_t\tau_{xxx} + \eta_t - u_x\xi_t - u_t\tau_t = 0 \end{aligned}$$

再将 (4.19) 代入到上式中消去 $u_t$ 项并合并同类项得

$$
\begin{aligned}
-\eta_x u^n &+ u_x^4(\mu\tau_{uuu}u^n + \mu\xi_{uuu}) + 3\mu u_{txx}\tau_x + u_{xx}^2(3\mu\xi_u + 3\mu\nu\tau_{xu}) \\
&+ u_x^3(\nu\tau_{uu}u^n + 3\mu\tau_{xuu}u^n + \nu\xi_{uu} - \mu\eta_{uuu} + \mu\nu u_{xx}\tau_{uuu} + \mu^2 u_{xxx}\tau_{uuu} + 3\mu\xi_{xuu}) \\
&- \nu\eta_{xx} + u_{tx}(2\nu\tau_x + 3\mu\tau_{xx}) + u_x^2(2\nu\tau_{xu}u^n + 3\mu\tau_{xxu}u^n - \nu\eta_{uu} + 3\mu u_{tx}\tau_{uu} \\
&+ u_{xxx}(3\tau_{xuu}\mu^2 + \nu\tau_{uu}\mu) + u_{xx}(3\mu\tau_{uu}u^n + 6\mu\xi_{uu} + \nu^2\tau_{uu} + 3\mu\nu\tau_{xuu}) \\
&+ 2\nu\xi_{xu} - 3\mu\eta_{xuu} + 3\mu\xi_{xxu}) + u_{xxx}(\mu\tau_x u^n + 3\mu\xi_x + \mu\nu\tau_{xx} + \mu^2\tau_{xxx} - \mu\tau_t) \\
&- \mu\eta_{xxx} + \eta_t + u_{xx}(\nu\tau_x u^n + 3\mu u_{tx}\tau_u + 2\nu\xi_x - 3\mu\eta_{xu} + 3\mu^2 u_{xxx}\tau_{xu} + 3\mu\xi_{xx} \\
&+ \nu^2\tau_{xx} + \mu\nu\tau_{xxx} - \nu\tau_t) + u_x(-n\eta u^{n-1} + \xi_x u^n + \nu\tau_{xx}u^n + \mu\tau_{xxx}u^n - \tau_t u^n \\
&+ \tau_x u^{2n} + 3\mu u_{txx}\tau_u + 3\mu\nu u_{xx}^2\tau_{uu} - 2\nu\eta_{xu} + u_{tx}(2\nu\tau_u + 6\mu\tau_{xu}) + \nu\xi_{xx} - 3\mu\eta_{xxu} \\
&+ u_{xxx}(3\tau_{xxu}\mu^2 + 3\xi_u\mu + 2\nu\tau_{xu}\mu) + u_{xx}(3\mu\tau_{xu}u^n + 2\nu\xi_u - 3\mu\eta_{uu} + 3\mu^2 u_{xxx}\tau_{uu} \\
&+ 9\mu\xi_{xu} + 2\nu^2\tau_{xu} + 3\mu\nu\tau_{xxu}) + \mu\xi_{xxx} - \xi_t) = 0
\end{aligned}
$$

注意到上式仍然相当复杂，为了简化计算，利用 Lie 的研究成果，可根据引理 3.1 可得 $\tau(t,x,u) = \tau(t)$，于是上式可简化为

$$
\begin{aligned}
-\eta_x u^n &+ 3\mu u_{xx}^2\xi_u + \mu u_x^4\xi_{uuu} + u_{xxx}(3\mu\xi_x - \mu\tau') + u_x^3(\nu\xi_{uu} - \mu\eta_{uuu} + 3\mu\xi_{xuu}) \\
&- \nu\eta_{xx} - \mu\eta_{xxx} + \eta_t + u_{xx}(-\nu\tau' + 2\nu\xi_x - 3\mu\eta_{xu} + 3\mu\xi_{xx}) \\
&+ u_x^2(-\nu\eta_{uu} + 6\mu u_{xx}\xi_{uu} + 2\nu\xi_{xu} - 3\mu\eta_{xuu} + 3\mu\xi_{xxu}) \\
&+ u_x(-n\eta u^{n-1} - \tau' u^n + \xi_x u^n + 3\mu u_{xxx}\xi_u - 2\nu\eta_{xu} + u_{xx}(2\nu\xi_u - 3\mu\eta_{uu} + 9\mu\xi_{xu}) \\
&+ \nu\xi_{xx} - 3\mu\eta_{xxu} + \mu\xi_{xxx} - \xi_t) = 0
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

对称确定方程 (4.21) 对于 $x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xxx}$ 的所有的一定成立。因而，令 $u_{xxx},u_{xx},u_x,u$ 的系数为零，获得以下关于 $\tau,\xi,\eta$ 的超定方程组：

$$
\begin{aligned}
u_x:&\quad -n\eta u^{n-1} - \tau' u^n + \xi_x u^n - 2\nu\eta_{xu} + \nu\xi_{xx} - 3\mu\eta_{xxu} + \mu\xi_{xxx} - \xi_t = 0 &\text{(4.22a)}\\
u_x^2:&\quad -\nu\eta_{uu} + 2\nu\xi_{xu} - 3\mu\eta_{xuu} + 3\mu\xi_{xxu} = 0 &\text{(4.22b)}\\
u_x^3:&\quad \nu\xi_{uu} - \mu\eta_{uuu} + 3\mu\xi_{xuu} = 0 &\text{(4.22c)}\\
u_x^4:&\quad \mu\xi_{uuu} = 0 &\text{(4.22d)}\\
u_{xx}:&\quad -\nu\tau' + 2\nu\xi_x - 3\mu\eta_{xu} + 3\mu\xi_{xx} = 0 &\text{(4.22e)}\\
u_{xx}^2:&\quad 3\mu\xi_u = 0 &\text{(4.22f)}\\
u_{xxx}:&\quad -\mu\tau' + 3\mu\xi_x = 0 &\text{(4.22g)}\\
u_x u_{xxx}:&\quad 3\mu\xi_u = 0 &\text{(4.22h)}\\
u_x u_{xx}:&\quad 2\nu\xi_u - 3\mu\eta_{uu} + 9\mu\xi_{xu} = 0 &\text{(4.22i)}\\
u_x^2 u_{xx}:&\quad 6\mu\xi_{uu} = 0 &\text{(4.22j)}\\
\text{常数项}:&\quad -u^n\eta_x - \nu\eta_{xx} - \mu\eta_{xxx} + \eta_t = 0 &\text{(4.22k)}
\end{aligned}
$$

由 (4.22g) 可得 $\xi_x = \frac{1}{3}\tau'$，再由 (4.22f)，则 (4.22i) 式化为 $2\nu\cdot 0 - 3\mu\eta_{uu} + 9\mu\cdot 0 = 0 \Rightarrow \eta_{uu} = 0$，(4.22e) 式化为 $-\nu\tau' + 2\nu\frac{1}{3}\tau' - 3\mu\eta_{xu} + 3\mu\cdot 0 = 0 \Rightarrow \eta_{xu} = -\frac{\nu}{9\mu}\tau'$，于是超定方程组 (4.22) 可简化

为：

$$u_{xx}^2: \quad \xi_u = 0 \tag{4.23a}$$
$$u_{xxx}: \quad \xi_x = \frac{\tau'}{3} \tag{4.23b}$$
$$u_x u_{xx}: \quad \eta_{uu} = 0 \tag{4.23c}$$
$$u_{xx}: \quad \eta_{xu} = -\frac{\nu}{9\mu}\tau' \tag{4.23d}$$
$$u_x: \quad -n\eta u^{n-1} - \tau' u^n + \xi_x u^n - 2\nu\eta_{xu} - \xi_t = 0 \tag{4.23e}$$
$$\text{常数项}: \quad -\eta_x u^n - \nu\eta_{xx} - \mu\eta_{xxx} + \eta_t = 0 \tag{4.23f}$$

由 (4.23a)、(4.23b) 和 (4.23c)、(4.23d) 可知，$\xi = \xi(t,x)$，$\eta_u = \eta_u(t,x)$ 所以分别设

$$\xi = \frac{1}{3}\tau'(t)x + p(t) \tag{4.24a}$$
$$\eta = -\frac{\nu}{9\mu}\tau'(t)xu + \sigma(t)u + \lambda(t,x) \tag{4.24b}$$

将 (4.24) 代入到 (4.23e) 和 (4.23f)，整理后得

$$u^n(\frac{n\nu}{9\mu}\tau' x - n\sigma - \frac{2}{3}\tau') - nu^{n-1}\lambda + \frac{2\nu^2}{9\mu}\tau' - \frac{1}{3}\tau'' x - p' = 0 \tag{4.25a}$$
$$u^{n+1}\frac{\nu}{9\mu}\tau' - u^n\lambda_x - \nu\lambda_{xx} - \mu\lambda_{xxx} - \frac{\nu}{9\mu}\tau'' xu + \sigma' u + \lambda_t = 0 \tag{4.25b}$$

**情形 1　当 $n = 1$ 时。** 上式 (4.25) 可简化为

$$u(\frac{\nu}{9\mu}\tau' x - \sigma - \frac{2}{3}\tau') - (\lambda - \frac{2\nu^2}{9\mu}\tau' + \frac{1}{3}\tau'' x + p') = 0 \tag{4.26a}$$
$$u^2\frac{\nu}{9\mu}\tau' - u\lambda_x - \nu\lambda_{xx} - \mu\lambda_{xxx} - \frac{\nu}{9\mu}\tau'' xu + \sigma' u + \lambda_t = 0 \tag{4.26b}$$

由 (4.26a) 解得

$$\sigma = 0, \quad \tau' = 0, \quad \lambda = -p' \tag{4.27}$$

将上式 (4.27) 代入到 (4.26b) 得 $-p'' = 0$，所以

$$\begin{array}{l} \tau = C_1 \\ p = C_2 t + C_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \sigma = 0 \\ \lambda = -C_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \tau = C_1 \\ \xi = C_2 t + C_3 \\ \eta = -C_2 \end{array}$$

故其点对称为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}.$$

**情形 2　当 $n \geqslant 2$ 时。** 可以解得

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 \\ \lambda &= 0 \\ \tau' &= 0 \\ p' &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \tau &= C_1 \\ p &= C_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \tau &= C_1 \\ \xi &= C_2 \\ \eta &= 0 \end{aligned}$$

故其点对称为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

# 4.5　(2+1) 维 KdV 型方程

## 4.5.1　(2+1) 维 KdV 型方程的简介

(2+1) 维 KdV 型方程的形式如下

$$u_t + u_x u_y + u_{xxy} + u_{xyy} = 0 \tag{4.28}$$

## 4.5.2　(2+1) 维 KdV 型方程的求解

由定理 3.1 可知，(2+1) 维 KdV 型方程 (4.28) 的点对称拥有形如 (3.3) 的无穷小生成元：

$$X = \tau(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial x} + \mu(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(t,x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

其三阶延拓无穷小生成元为

$$X^{(3)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_{xxy}^{(3)}\frac{\partial}{\partial u_{xxy}} + \eta_{xyy}^{(3)}\frac{\partial}{\partial u_{xyy}}$$

其中 $\eta_t^{(1)}, \eta_x^{(1)}, \eta_{xxy}^{(3)}, \eta_{xyy}^{(3)}$ 可根据 (2.5) 计算，下面来计算这些值。正如递推公式 (2.5) 所阐述的，在计算第 $k$ 阶延拓无穷小时，必须先求得第 $k-1$ 阶无穷小。可见这样的迭代计算计算量非常大。为了简化计算，经过笔者研究以及用计算机代数 Mathematica 验证，以下猜想是正确的：

**定理 4.1**　$\eta_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{(k)}$ 可由 (2.5) 公式迭代获得，$j_1, j_2, \cdots, j_k$ 为 $1, 2, \cdots, k$ 的一个任意排列，则有 $\eta_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{(k)}$ 和 $\eta_{i_{j_1} i_{j_2} \cdots i_{j_k}}^{(k)}$ 等价。

于是由定理 4.1 可得，计算任意两个无穷小 $\eta_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{(k)}$ 和 $\eta_{j_1 j_2 \cdots j_l}^{(l)}$ 时，可先求列表 $\{i_1, i_2, \cdots i_k\}$ 和 $\{j_1, j_2, \cdots, j_l\}$ 的公共子列表 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 即 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \Rightarrow \{a_1, a_2, \cdots, a_n, i_{k_1}, i_{k_2}, \cdots, i_{k_{k-n}}\}$ 和 $\{j_1, j_2, \cdots, j_l\} \Rightarrow \{a_1, a_2, \cdots, a_n, j_{l_1}, j_{l_2}, \cdots, j_{l_{l-n}}\}$，然后可先求得 $\eta_{a_1, a_2, \cdots, a_n}^{(n)}$，最后再继续分别求。所以在求本题的无穷小 $\eta_{xxy}^{(3)}$ 和 $\eta_{xyy}^{(3)}$ 时，因为 $\eta_{xxy}^{(3)} \Leftrightarrow \eta_{xyx}^{(3)}$，于是可先求 $\eta_{xy}^{(2)}$，再求 $\eta_{xyx}^{(3)}$ 和

$\eta_{xyy}^{(3)}$。

$$
\begin{aligned}
\eta_t^{(1)} &= D_t(\eta) - D_t(\tau)u_t - D_t(\xi)u_x - D_t(\mu)u_y \\
\eta_x^{(1)} &= D_x(\eta) - D_x(\tau)u_t - D_x(\xi)u_x - D_x(\mu)u_y \\
\eta_y^{(1)} &= D_y(\eta) - D_y(\tau)u_t - D_y(\xi)u_x - D_y(\mu)u_y \\
\eta_{xy}^{(2)} &= D_y(\eta_x^{(1)}) - D_y(\tau)u_{xt} - D_y(\xi)u_{xx} - D_y(\mu)u_{xy} \\
\eta_{xyy}^{(3)} &= D_y(\eta_{xy}^{(2)}) - D_y(\tau)u_{xyt} - D_y(\xi)u_{xyx} - D_y(\mu)u_{xyy} \\
\eta_{xxy}^{(3)} &= \eta_{xyx}^{(3)} = D_x(\eta_{xy}^{(2)}) - D_x(\tau)u_{xyt} - D_x(\xi)u_{xyx} - D_x(\mu)u_{xyy}
\end{aligned}
$$

以上求解结果见附录 A.2。

由确定方程 (3.8) 可得，(2+1) 维 KdV 型方程的确定方程形式为

$$
\eta_t^{(1)} + u_x\eta_y^{(1)} + u_y\eta_x^{(1)} + \eta_{xyy}^{(3)} + \eta_{xxy}^{(3)} = 0 \tag{4.29}
$$

将 (A.2) 代入到 (4.29) 得

$$
\begin{aligned}
&-u_x\mu_{uuu}u_y^3-\mu_{xuu}u_y^3-2u_x\mu_uu_y^2-3u_{xy}\mu_{uu}u_y^2-u_{xx}\mu_{uu}u_y^2-u_{xx}\xi_{uu}u_y^2-u_{tx}\tau_{uu}u_y^2\\
&\quad+u_x\eta_{uuu}u_y^2-u_x^2\mu_{uuu}u_y^2-u_x^2\xi_{uuu}u_y^2-u_xu_t\tau_{uuu}u_y^2-2u_x\mu_{yuu}u_y^2-\mu_xu_y^2\\
&\quad+\eta_{xuu}u_y^2-2u_x\mu_{xuu}u_y^2-u_x\xi_{xuu}u_y^2-u_t\tau_{xuu}u_y^2-2\mu_{xyu}u_y^2-\mu_{xxu}u_y^2\\
&\quad+2u_x\eta_uu_y-3u_{xyy}\mu_uu_y-2u_{xxy}\mu_uu_y-u_t\mu_uu_y-2u_x^2\xi_uu_y-2u_{xxy}\xi_uu_y\\
&\quad-u_{xxx}\xi_uu_y-2u_xu_t\tau_uu_y-2u_{txy}\tau_uu_y-u_{txx}\tau_uu_y+2u_{xy}\eta_{uu}u_y+u_{xx}\eta_{uu}u_y\\
&\quad-3u_{yy}u_x\mu_{uu}u_y-4u_xu_{xy}\mu_{uu}u_y-4u_xu_{xy}\xi_{uu}u_y-3u_xu_{xx}\xi_{uu}u_y\\
&\quad-2u_{xy}u_t\tau_{uu}u_y-u_{xx}u_t\tau_{uu}u_y-2u_xu_{ty}\tau_{uu}u_y-2u_xu_{tx}\tau_{uu}u_y+u_x^2\eta_{uuu}u_y\\
&\quad-u_x^3\xi_{uuu}u_y-u_x^2u_t\tau_{uuu}u_y-u_x\mu_yu_y-4u_{xy}\mu_{yu}u_y-u_{xx}\mu_{yu}u_y-2u_{xx}\xi_{yu}u_y\\
&\quad-2u_{tx}\tau_{yu}u_y+2u_x\eta_{yuu}u_y-u_x^2\mu_{yuu}u_y-2u_x^2\xi_{yuu}u_y-2u_xu_t\tau_{yuu}u_y\\
&\quad-u_x\mu_{yyu}u_y+\eta_xu_y-u_x\xi_xu_y-u_t\tau_xu_y-3u_{yy}\mu_{xu}u_y-4u_{xy}\mu_{xu}u_y\\
&\quad-2u_{xy}\xi_{xu}u_y-2u_{xx}\xi_{xu}u_y-2u_{ty}\tau_{xu}u_y-2u_{tx}\tau_{xu}u_y+2u_x\eta_{xuu}u_y\\
&\quad-2u_x^2\xi_{xuu}u_y-2u_xu_t\tau_{xuu}u_y+2\eta_{xyu}u_y-2u_x\mu_{xyu}u_y-2u_x\xi_{xyu}u_y\\
&\quad-2u_t\tau_{xyu}u_y-\mu_{xyy}u_y+\eta_{xxu}u_y-u_x\xi_{xxu}u_y-u_t\tau_{xxu}u_y-\mu_{xxy}u_y\\
&\quad-\mu_tu_y+u_{xyy}\eta_u+u_{xxy}\eta_u+u_t\eta_u-2u_{xy}^2\mu_u-u_{yyy}u_x\mu_u-3u_{yy}u_{xy}\mu_u\\
&\quad-2u_xu_{xyy}\mu_u-u_{yy}u_{xx}\mu_u-2u_{xy}^2\xi_u-2u_xu_{xyy}\xi_u-u_{yy}u_{xx}\xi_u-3u_{xy}u_{xx}\xi_u\\
&\quad-3u_xu_{xxy}\xi_u-u_xu_t\xi_u-u_t^2\tau_u-u_{xyy}u_t\tau_u-u_{xxy}u_t\tau_u-2u_{xy}u_{ty}\tau_u\\
&\quad-u_{xx}u_{ty}\tau_u-u_xu_{tyy}\tau_u-u_{yy}u_{tx}\tau_u-2u_{xy}u_{tx}\tau_u-2u_xu_{txy}\tau_u+u_{yy}u_x\eta_{uu}\\
&\quad+2u_xu_{xy}\eta_{uu}-u_{yy}u_x^2\mu_{uu}-u_{yy}u_x^2\xi_{uu}-3u_x^2u_{xy}\xi_{uu}-u_{yy}u_xu_t\tau_{uu}\\
&\quad-2u_xu_{xy}u_t\tau_{uu}-u_x^2u_{ty}\tau_{uu}+u_x\eta_y-2u_{xyy}\mu_y-u_{xxy}\mu_y-u_x^2\xi_y-2u_{xxy}\xi_y\\
&\quad-u_{xxx}\xi_y-u_xu_t\tau_y-2u_{txy}\tau_y-u_{txx}\tau_y+2u_{xy}\eta_{yu}+u_{xx}\eta_{yu}-2u_{yy}u_x\mu_{yu}\\
&\quad-2u_xu_{xy}\mu_{yu}-4u_xu_{xy}\xi_{yu}-3u_xu_{xx}\xi_{yu}-2u_{xy}u_t\tau_{yu}-u_{xx}u_t\tau_{yu}\\
&\quad-2u_xu_{ty}\tau_{yu}-2u_xu_{tx}\tau_{yu}+u_x^2\eta_{yuu}-u_x^3\xi_{yuu}-u_x^2u_t\tau_{yuu}-u_{xy}\mu_{yy}-u_{xx}\xi_{yy}\\
&\quad-u_{tx}\tau_{yy}+u_x\eta_{yyu}-u_x^2\xi_{yyu}-u_xu_t\tau_{yyu}-u_{yyy}\mu_x-2u_{xyy}\mu_x-u_{xyy}\xi_x\\
&\quad-2u_{xxy}\xi_x-u_{tyy}\tau_x-2u_{txy}\tau_x+u_{yy}\eta_{xu}+2u_{xy}\eta_{xu}-2u_{yy}u_x\mu_{xu}-u_{yy}u_x\xi_{xu}\\
&\quad-4u_xu_{xy}\xi_{xu}-u_{yy}u_t\tau_{xu}-2u_{xy}u_t\tau_{xu}-2u_xu_{ty}\tau_{xu}-2u_{yy}\mu_{xy}-2u_{xy}\mu_{xy}\\
&\quad-2u_{xy}\xi_{xy}-2u_{xx}\xi_{xy}-2u_{ty}\tau_{xy}-2u_{tx}\tau_{xy}+2u_x\eta_{xyu}-2u_x^2\xi_{xyu}-2u_xu_t\tau_{xyu}\\
&\quad+\eta_{xyy}-u_x\xi_{xyy}-u_t\tau_{xyy}-u_{yy}\mu_{xx}-u_{xy}\xi_{xx}-u_{ty}\tau_{xx}+\eta_{xxy}-u_x\xi_{xxy}\\
&\quad-u_t\tau_{xxy}+\eta_t-u_x\xi_t-u_t\tau_t=0
\end{aligned}
$$

再将 (4.28) 代入到上式中消去 $u_t$ 项并合并同类项得

$$
\begin{aligned}
&-u_x\mu_{uuu}u_y^3-\mu_{xuu}u_y^3-2u_x\mu_u u_y^2-3u_{xy}\mu_{uu}u_y^2-u_{xx}\mu_{uu}u_y^2-u_{xx}\xi_{uu}u_y^2-u_{tx}\tau_{uu}u_y^2\\
&\quad+u_x\eta_{uuu}u_y^2-u_x^2\mu_{uuu}u_y^2-u_x^2\xi_{uuu}u_y^2-u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{uuu}u_y^2+\eta_{xyy}\\
&\quad-2u_x\mu_{yuu}u_y^2-\mu_xu_y^2+\eta_{xuu}u_y^2-2u_x\mu_{xuu}u_y^2-u_x\xi_{xuu}u_y^2+\eta_{xxy}-u_x\xi_{xxy}\\
&\quad-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xuu}u_y^2-2\mu_{xyu}u_y^2-\mu_{xxu}u_y^2+2u_x\eta_uu_y-2u_x^2\xi_{xyu}\\
&\quad-3u_{xyy}\mu_uu_y-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\mu_uu_y-2u_{xxy}\mu_uu_y-2u_x^2\xi_uu_y-u_{yy}\mu_{xx}\\
&\quad-2u_{xxy}\xi_uu_y-u_{xxx}\xi_uu_y-2u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_uu_y-2u_{txy}\tau_uu_y\\
&\quad-u_{txx}\tau_uu_y+2u_{xy}\eta_{uu}u_y+u_{xx}\eta_{uu}u_y-3u_{yy}u_x\mu_{uu}u_y-4u_xu_{xy}\mu_{uu}u_y-2u_{tx}\tau_{xy}\\
&\quad-4u_xu_{xy}\xi_{uu}u_y-3u_xu_{xx}\xi_{uu}u_y-2u_{xy}(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{uu}u_y+2u_x\eta_{xyu}\\
&\quad-u_{xx}(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{uu}u_y-2u_xu_{ty}\tau_{uu}u_y-2u_xu_{tx}\tau_{uu}u_y-u_x\xi_{xyy}\\
&\quad+u_x^2\eta_{uuu}u_y-u_x^3\xi_{uuu}u_y-u_x^2(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{uuu}u_y-u_x\mu_yu_y-2u_{tx}\tau_{xu}u_y\\
&\quad-4u_{xy}\mu_{yu}u_y-u_{xx}\mu_{yu}u_y-2u_{xx}\xi_{yu}u_y-2u_{tx}\tau_{yu}u_y+2u_x\eta_{yuu}u_y-u_{xy}\xi_{xx}-u_{ty}\tau_{xx}\\
&\quad-u_x^2\mu_{yuu}u_y-2u_x^2\xi_{yuu}u_y-2u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{yuu}u_y+\eta_t-u_x\xi_t\\
&\quad-u_x\mu_{yyu}u_y+\eta_xu_y-u_x\xi_xu_y-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_xu_y-3u_{yy}\mu_{xu}u_y\\
&\quad-4u_{xy}\mu_{xu}u_y-2u_{xy}\xi_{xu}u_y-2u_{xx}\xi_{xu}u_y-2u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xyu}\\
&\quad+2u_x\eta_{xuu}u_y-2u_x^2\xi_{xuu}u_y-2u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xuu}u_y+2\eta_{xyu}u_y\\
&\quad-2u_x\mu_{xyu}u_y-2u_x\xi_{xyu}u_y-2(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xyu}u_y-\mu_{xyy}u_y\\
&\quad+\eta_{xxu}u_y-u_x\xi_{xxu}u_y-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xxu}u_y-\mu_{xxy}u_y-\mu_tu_y\\
&\quad+u_{xyy}\eta_u+(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\eta_u+u_{xxy}\eta_u-2u_{xy}^2\mu_u-u_{yyy}u_x\mu_u-2u_{ty}\tau_{xu}u_y\\
&\quad-3u_{yy}u_{xy}\mu_u-2u_xu_{xyy}\mu_u-u_{yy}u_{xx}\mu_u-2u_{xy}^2\xi_u-2u_xu_{xyy}\xi_u-u_{yy}u_{xx}\xi_u\\
&\quad-3u_{xy}u_{xx}\xi_u-u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\xi_u-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_t\\
&\quad-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})^2\tau_u-u_{xyy}(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_u-4u_xu_{xy}\xi_{xu}\\
&\quad-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})u_{xxy}\tau_u-2u_{xy}u_{ty}\tau_u-u_{xx}u_{ty}\tau_u-u_xu_{tyy}\tau_u-3u_x^2u_{xy}\xi_{uu}\\
&\quad-u_{yy}u_{tx}\tau_u-2u_{xy}u_{tx}\tau_u-2u_xu_{txy}\tau_u+u_{yy}u_x\eta_{uu}+2u_xu_{xy}\eta_{uu}-u_{yy}u_x^2\mu_{uu}\\
&\quad-u_{yy}u_x^2\xi_{uu}-u_{yy}u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{uu}-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xyy}\\
&\quad-2u_xu_{xy}(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{uu}-u_x^2u_{ty}\tau_{uu}+u_x\eta_y-2u_{xyy}\mu_y\\
&\quad-u_{xxy}\mu_y-u_x^2\xi_y-2u_{xxy}\xi_y-u_{xxx}\xi_y-u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_y\\
&\quad-2u_{txy}\tau_y-u_{txx}\tau_y+2u_{xy}\eta_{yu}+u_{xx}\eta_{yu}-2u_{yy}u_x\mu_{yu}-2u_xu_{xy}\mu_{yu}-2u_{ty}\tau_{xy}\\
&\quad-4u_xu_{xy}\xi_{yu}-3u_xu_{xx}\xi_{yu}-2u_{xy}(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{yu}-3u_xu_{xxy}\xi_u\\
&\quad-u_{xx}(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{yu}-2u_xu_{ty}\tau_{yu}-2u_xu_{tx}\tau_{yu}+u_x^2\eta_{yuu}-2u_{xx}\xi_{xy}\\
&\quad-u_x^3\xi_{yuu}-u_x^2(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{yuu}-u_{xy}\mu_{yy}-u_{xx}\xi_{yy}-u_{tx}\tau_{yy}\\
&\quad+u_x\eta_{yyu}-u_x^2\xi_{yyu}-u_x(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{yyu}-u_{yyy}\mu_x-2u_{xyy}\mu_x\\
&\quad-u_{xyy}\xi_x-2u_{xxy}\xi_x-u_{tyy}\tau_x-2u_{txy}\tau_x+u_{yy}\eta_{xu}+2u_{xy}\eta_{xu}-2u_{yy}u_x\mu_{xu}\\
&\quad-u_{yy}u_x\xi_{xu}-u_{yy}(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xu}-(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xxy}\\
&\quad-2u_{xy}(-u_yu_x-u_{xyy}-u_{xxy})\tau_{xu}-2u_xu_{ty}\tau_{xu}-2u_{yy}\mu_{xy}-2u_{xy}\mu_{xy}-2u_{xy}\xi_{xy}=0
\end{aligned}
$$

注意到上式仍然相当复杂，为了简化计算，利用 Lie 的研究成果，可根据引理 3.1 可得 $\tau(t,x,y,u)=\tau(t)$，再结合定理 3.2可得 $\frac{\partial\xi}{\partial u}=0, \frac{\partial\mu}{\partial u}=0, \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}=0$。于是上式可简化为

$$
\begin{aligned}
u_y(u_x(\eta_u-\mu_y-\xi_x+\tau')+\eta_x+2\eta_{xyu}+\eta_{xxu}-\mu_{xyy}-\mu_{xxy}-\mu_t)\\
+u_{xy}(2\eta_{yu}+2\eta_{xu}-\mu_{yy}-2\mu_{xy}-2\xi_{xy}-\xi_{xx})-u_y^2\mu_x\\
+u_{yy}(\eta_{xu}-2\mu_{xy}-\mu_{xx})+u_{xx}(\eta_{yu}-\xi_{yy}-2\xi_{xy})-u_x^2\xi_y\\
+u_x(\eta_y+\eta_{yyu}+2\eta_{xyu}-\xi_{xyy}-\xi_{xxy}-\xi_t)\\
+u_{xyy}(-2\mu_y-2\mu_x-\xi_x+\tau')+u_{xxy}(-\mu_y-2\xi_y-2\xi_x+\tau')\\
-u_{yyy}\mu_x-u_{xxx}\xi_y+\eta_{xyy}+\eta_{xxy}+\eta_t=0
\end{aligned}
$$

对称确定方程 (4.29) 对于 $x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xxx},u_y,u_{yy},u_{yyy},u_{xy},u_{xyy},u_{xxy}$ 的所有的一定成立。因而，令 $u_y,u_{yy},u_{yyy},u_{xy},u_{xyy},u_{xxy},u_{xxx},u_{xx},u_x,u$ 的系数为零，获得以下关于 $\tau,\xi,\mu,\eta$ 的超定方程组：

$$u_xu_y:\quad \eta_u-\mu_y-\xi_x+\tau'=0 \tag{4.30a}$$
$$u_y:\quad \eta_x+2\eta_{xyu}+\eta_{xxu}-\mu_{xyy}-\mu_{xxy}-\mu_t=0 \tag{4.30b}$$
$$u_{xy}:\quad 2\eta_{yu}+2\eta_{xu}-\mu_{yy}-2\mu_{xy}-2\xi_{xy}-\xi_{xx}=0 \tag{4.30c}$$
$$u_y^2:\quad -\mu_x=0 \tag{4.30d}$$
$$u_{yy}:\quad \eta_{xu}-2\mu_{xy}-\mu_{xx}=0 \tag{4.30e}$$
$$u_{xx}:\quad \eta_{yu}-\xi_{yy}-2\xi_{xy}=0 \tag{4.30f}$$
$$u_x^2:\quad -\xi_y=0 \tag{4.30g}$$
$$u_x:\quad \eta_y+\eta_{yyu}+2\eta_{xyu}-\xi_{xyy}-\xi_{xxy}-\xi_t=0 \tag{4.30h}$$
$$u_{xyy}:\quad -2\mu_y-2\mu_x-\xi_x+\tau'=0 \tag{4.30i}$$
$$u_{xxy}:\quad -\mu_y-2\xi_y-2\xi_x+\tau'=0 \tag{4.30j}$$
$$u_{yyy}:\quad \mu_x=0 \tag{4.30k}$$
$$u_{xxx}:\quad \xi_y=0 \tag{4.30l}$$
$$\text{常数项}:\quad \eta_{xyy}+\eta_{xxy}+\eta_t=0 \tag{4.30m}$$

由 (4.30k) 和 (4.30l) 可知，$\mu=\mu(t,y),\quad \xi=\xi(t,x)$，所以 (4.30e) 和 (4.30f) 变为 $\eta_{xu}=0,\eta_{yu}=0$，即 $\eta_u=\eta_u(t)$。因此，上面的方程组可再次简化为

$$u_xu_y:\quad \eta_u-\mu_y-\xi_x+\tau'=0 \tag{4.31a}$$
$$u_y:\quad \eta_x-\mu_t=0 \tag{4.31b}$$
$$u_{xy}:\quad -\mu_{yy}-\xi_{xx}=0 \tag{4.31c}$$
$$u_x:\quad \eta_y-\xi_t=0 \tag{4.31d}$$
$$u_{xyy}:\quad -2\mu_y-\xi_x+\tau'=0 \tag{4.31e}$$
$$u_{xxy}:\quad -\mu_y-2\xi_x+\tau'=0 \tag{4.31f}$$
$$\text{常数项}:\quad \eta_{xyy}+\eta_{xxy}+\eta_t=0 \tag{4.31g}$$

由 (4.31e) 和 (4.31f) 可得 $\xi_x = \mu_y = \frac{1}{3}\tau'(t)$ 所以设

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{3}\tau'(t)x + A(t) \\ \mu &= \frac{1}{3}\tau'(t)y + B(t) \end{aligned} \tag{4.32}$$

再由 (4.31d) 和 (4.31b) 可得

$$\begin{aligned} \eta_y &= \xi_t = \xi_t(t,x) = \frac{1}{3}\tau''(t)x + A'(t) \Rightarrow \eta_{yy} = 0 \Rightarrow \eta_{xyy} = 0 \\ \eta_x &= \mu_t = \mu_t(t,y) = \frac{1}{3}\tau''(t)y + B'(t) \Rightarrow \eta_{xx} = 0 \Rightarrow \eta_{xxy} = 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

由 (4.31g) 可知，$\eta_t = 0$。再由 (4.31a) 可得 $\eta_u = \frac{1}{3}\tau'(t)$ 而 $\eta_t = 0$，所以 $\tau'(t) = C_1 \Rightarrow \tau(t) = C_1 t + C_2$。

$$\begin{aligned} \eta_y &= A'(t) = C_3 \Rightarrow A(t) = C_3 t + C_4 \\ \eta_x &= B'(t) = C_5 \Rightarrow B(t) = C_5 t + C_6 \\ \eta_u &= \frac{1}{3}C_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \tau &= C_1 t + C_2 \\ \xi &= \frac{1}{3}C_1 x + C_3 t + C_4 \\ \mu &= \frac{1}{3}C_1 y + C_5 t + C_6 \\ \eta &= \frac{1}{3}C_1 u + C_3 y + C_5 x + C_7 \end{aligned}$$

故其点对称为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = t\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_7 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{3}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{3}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{u}{3}\frac{\partial}{\partial u}.$$

## 4.6 计算机代数系统求解微分方程的 Lie 对称群解法 (以 Mathematica 为例)

在计算的过程中，我们发现用 Lie 对称群方法求解的计算量惊人！如果偏微分方程的阶数一高，那么计算量的复杂度就会大大增加。通过手算计算如此大计算量的方程存在以下几个弊端：

1. 因计算量庞大，需耗费更多的时间；
2. 表达式与表达式之间极为相似，在不经意间，极易可能出现书写错误；
3. 排查错误需花费更多的时间；
4. 计算结果的正确性不能保证，需花费额外的时间进行验算；
5. 纸张的耗费与建立环境友好型社会相矛盾。

随着近几十年来计算机软硬件的快速发展，日新月异的计算机开始承担起了人类的工作活动。同样地，在符号计算领域，诸如 Maple ，Mathematica 等强大的计算机代数系统给我们带来了诸多便利。其优点不言而喻，环保，省时！省时！省时！(重要的优点要说三遍。) 因此，笔者拟用 Mathematica 进行计算过程的重现 mBurgers 方程，GKdV 方程和 GKdV-Burgers 方程的求解。

1. 我们首先来计算方程的确定方程，根据 (3.8) 我们就可以算给定 PDEs 的确定方程的形式：

Mathematica 代码 1: PDEs 确定方程形式的确定

```
Clear["Global`*"]
U = u[t,x]
Tau = \[Tau][t,x,U]
Xi = \[Xi][t,x,U]
Eta = \[Eta][t,x,U]

(* Compute determining equation by using recursive function *)
(* 求解给定PDEs 的确定方程的形式*)
DE[n_,f_,u_,v1_,v2_] := −D[f,D[u,{v1,n}]]zeta[n]+DE[n−1,f,u,v1,v2];
DE[1,f_,u_,v1_,v2_] := kappa[1]−D[f,D[u,v1]]zeta[1]−D[f,v2]Tau−D[f,v1]Xi−D[f,u]Eta;

mBurgers = U^n D[U,x]+\[Nu] D[U,{x,2}]; (*Modified Burgers Equation*)
M = 2;
mBurgersDE = DE[M, mBurgers /. n −> M, U, x, t]
```

2. 我们先求得方程延拓后的无穷小生成元，然后计算所需的无穷小。因为在 [2] 和 [16] 两本书中均未给出发展方程的递推公式，所以笔者在第三章的第三节 3.3 结合 [2] 和 [16] 的方法中给出了具体递推公式 (3.23)。因此，根据 (3.23) 给出计算第 $n$ 阶延拓无穷小的通用程序。因为该公式涉及到了迭代，因此在编写程序的时候，我们采用递归函数来实现：

Mathematica 代码 2: 延拓后的无穷小计算

```
ClearAll["Global`*"]
(* Compute infinitesimal operator by using recursive function *)
(* 利用递归来计算延拓后的无穷小量*)
CO [n_,u_,f1_,f2_,eta_,v1_,v2_] := D[CO[n−1,u,f1,f2,eta,v1,v2],v1]−D[u,{v1,n}]D[f1,v1]−D[D[u,{v1,n
    −1}],v2]D[f2,v1];
CO[1,u_,f1_,f2_,eta_,v1_,v2_] := D[eta,v1]−D[u,v1]D[f1,v1]−D[u,v2]D[f2,v1];

(* Examples *)
(* 示例*)
U = u[t,x];
Tau = \[Tau][t,x,U];
Xi = \[Xi][t,x,U];
Eta = \[Eta][t,x,U];

Kappa1 = CO[1,U,Tau,Xi,Eta,t,x]
Kappa3 = CO[3,U,Tau,Xi,Eta,t,x]
Zeta3 = CO[3,U,Xi,Tau,Eta,x,t]
Zeta5 = CO[5,U,Xi,Tau,Eta,x,t]
```

3. 在以上两步的基础上，我们就可以将无穷小代入到确定方程中，开始进行详细的计算，下面的程序能够帮助我们获得关于 $\tau, \xi, \eta$ 的超定方程组：

Mathematica 代码 3: mBurgers, GKdV, GKdV-Burgers 方程的超定方程组求解程序

```
Clear["Global`*"]
U = u[t,x]
Tau = \[Tau][t,x,U]
Xi = \[Xi][t,x,U]
Eta = \[Eta][t,x,U]
```

```

(* Compute operator by using recursive function *)
(* 利用递归函数计算无穷小量*)
CO [n_,u_,f1_,f2_,eta_,v1_,v2_] := D[CO[n-1,u,f1,f2,eta,v1,v2],v1]-D[u,{v1,n}]D[f1,v1]-D[D[u,{v1,n-1}],v2]D[f2,v1];
CO[1,u_,f1_,f2_,eta_,v1_,v2_] := D[eta,v1]-D[u,v1]D[f1,v1]-D[u,v2]D[f2,v1];

(* Compute determining equation by using recursive function *)
(* 求取给定方程的确定方程的形式，并利用递归函数将无穷小量代入*)
DEO[n_,f_,u_,v1_,v2_,Xi_,Tau_,Eta_] :=-D[f,D[u,{v1,n}]]CO[n,u,Xi,Tau,Eta,v1,v2]+DEO[n-1,f,u,v1,v2,Xi,Tau,Eta] ;
DEO[1,f_,u_,v1_,v2_,Xi_,Tau_,Eta_] := CO[1,u,Tau,Xi,Eta,v2,v1]-D[f,D[u,v1]]CO[1,u,Xi,Tau,Eta,v1,v2]-D[f,u]Eta(*-D[f,v2]Tau-D[f,v1]Xi *);

Clear[MYDSolve]
MYDSolve[pde_] := Module[{de,der,Tau,Xi,Eta,clist,i,j},
   Tau = \[Tau][t,x,U];
   Xi = \[Xi][t,x,U];
   Eta = \[Eta][t,x,U];
   de = ExpandAll[DEO[3,pde,U,x,t,Xi,Tau,Eta]];
   clist = {};
   der = Collect[de/.D[U,t] -> pde,Derivative[_,_][u][t,x]];
   For[i = 1,i <= 3,i++,
      clisttmp = {};
      For[j = 1,j <= 4,j++,
         cder[i][j] = Coefficient[der,Derivative[0,i][u][t,x]^j];
         AppendTo[clisttmp,cder[i][j]];
      ];
      AppendTo[clist,clisttmp];
   ];
   (*Return[{de,der,clist}]; *)
   Print[{de,der}];
   Print[MatrixForm[clist]];
]

(* Equations *)
(* 将要求的方程放在一个列表中*)
mBurgers = U^n D[U,x]+\[Nu] D[U,{x,2}]; (*Modified Burgers Equation*)
mKdV = U^n D[U,x]+\[Mu] D[U,{x,3}]; (*Modified KdV Equation*)
mBKdV = U^n D[U,x]+\[Nu] D[U,{x,2}]+\[Mu] D[U,{x,3}]; (*Modified Burgers-KdV Equation*)
functions = {mBurgers,mKdV,mBKdV};
flength = Length[functions];

For[i = 1,i <= flength,i++, Print[i]; r[i] = MYDSolve[functions[[i]]]]
```

说明：DEO 函数是前面两个步骤的终合，其作用是计算给定方程的确定方程形式，然后将对应的无穷小代入到方程之中。紧接着，笔者自定义了方程求解器，即函数 `MYDSolve[pde_]`，其功能为

表 1: 函数说明表

| 函数名 | 参数 | 功能描述 |
|---|---|---|
| CO | n, u, f1, f2, eta, v1, v2 | 求 $n$ 阶延拓无穷小 |
| DEO | n, f, u , v1, v2, Xi, Tau, Eta | 求确定方程 |
| MYDSolve | pde (即给定的函数) | 化简确定方程以获得关于 $\tau,\xi,\eta$ 的超定方程 |

4. 经过以上的步骤之后，即可得到化简的确定方程和超定方程组。因为时间和笔者的水平有限，并未给出超定方程组的求解程序，见谅！

与上述三个方程不同的是，(2+1) 维 KdV 型方程的情况就要复杂的多，因此笔者也暂未能给出在任意个变量的确定方程和无穷小的计算程序，以下仅给出针对 (2+1) 型 KdV 型方程的求解程序：

Mathematica 代码 4: (2+1) 维 KdV 型方程的超定方程组求解求解程序

```
Clear["Global`*"]
Remove["Global`*"]

(* A Function To Check Whether Two Expressions Are Equivalent *)
(* 判定两个表达式是否等价*)
IsEquivalent[expr1_,expr2_] := ExpandAll[expr1] === ExpandAll[expr2];

(* Define Functions *)
(* 定义所需要的函数*)
U = u[t,x,y];
Tau = \[Tau][t,x,y,U];
Xi = \[Xi][t,x,y,U];
Mu = \[Mu][t,x,y,U];
Eta = \[Eta][t,x,y,U];

(* According To The Theorem, Variables Can Be Simplified Below *)
(* 根据定理，为了简化计算可利用以下的式子实现*)
(*Tau = \[Tau][T];
Xi = \[Xi][t,x,y];
Mu = \[Mu][t,x,y]; *)

(* Compute Infinitesimals According To The Formula *)
(* 根据延拓公式求解无穷小量*)
ZetaT = D[Eta,t]-D[Xi,t]D[U,x]-D[Tau,t]D[U,t]-D[Mu,t]D[U,y]
ZetaX = D[Eta,x]-D[Xi,x]D[U,x]-D[Tau,x]D[U,t]-D[Mu,x]D[U,y]
ZetaY = D[Eta,y]-D[Xi,y]D[U,x]-D[Tau,y]D[U,t]-D[Mu,y]D[U,y]
ZetaXY = D[ZetaX,y]-D[Xi,y]D[D[U,x],x]-D[Tau,y]D[D[U,x],t]-D[Mu,y]D[D[U,x],y]
ZetaXYY = D[ZetaXY,y]-D[Xi,y]D[D[D[U,x],y],x]-D[Tau,y]D[D[D[U,x],y],t]-D[Mu,y]D[D[D[U,x],y],y]
ZetaXYX = D[ZetaXY,x]-D[Xi,x]D[D[D[U,x],y],x]-D[Tau,x]D[D[D[U,x],y],t]-D[Mu,x]D[D[D[U,x],y],y]
ZetaYX = D[ZetaY,x]-D[Xi,x]D[D[U,y],x]-D[Tau,x]D[D[U,y],t]-D[Mu,x]D[D[U,y],y]
IsEquivalent[ZetaXY,ZetaYX]

(* Obtain Determining Equation *)
(* 将具体的无穷小量和变量的偏导数代入到式子中获得相应的确定方程*)
DKdV = ZetaT+D[U,x]ZetaY+D[U,y]ZetaX+ZetaXYY+ZetaXYX //ExpandAll
```

```
DKdVR = DKdV/.D[U,t] ->-D[U,x]D[U,y]-D[D[D[U,x],y],x]-D[D[D[U,x],y],y]

(* Simplify Determining Equation And Attain Desired Cofficient Matrix of Terms *)
(* 简化确定方程并且合并同类项获得系数矩阵*)
clist = {};
der = Collect[DKdVR,Derivative[_,_,_][u][t,x,y]];
For[i = 1,i <= 3,i++,
  clisttmp = {};
  For[j = 1,j <= 4,j++,
    cder[i][j] = Coefficient[der,Derivative[0,i][u][t,x,y]^j];
    AppendTo[clisttmp,cder[i][j]];
  ];
  AppendTo[clist,clisttmp];
];

clist
der
```

## 4.7 结论与展望

### 4.7.1 结论

Lie 对称群方法为方程的显式解的构造提供了重要方法，使得从旧解推得新解成为了可能。但是，使用 Lie 对称群方法求解微分方程的解的过程中涉及极大的计算量，因此与计算机代数系统配合起来求解方程将是个非常理想的途径。

### 4.7.2 不足与展望

本文的不足有以下几点：

1. 未能给出应用 Lie 对称群方法求解所给定的几类微分方程的超定方程求解程序，与完全自动化计算仍有较大的距离。
2. 在 Lie 对称群理论上的贡献不多，所做出的成果仍以简化计算为主，对 Lie 对称群理论的贡献少之又少。

因此，针对以上不足，本文的展望如下：

1. 针对更多的方程，给出 Lie 对称群方法求解的程序；
2. 完善并提高现有程序的求解能力，构建方程的通解求解程序；
3. 做出与 Lie 群理论发展切实相关的理论成果。

# 附录 A　几个延拓后无穷小具体结果

## A.1　三次发展方程延拓无穷小具体结果

$$
\begin{aligned}
&\kappa_1 = u_t\left(-u_x\xi_u + \eta_u - \tau_t\right) - u_x\xi_t - u_t^2\tau_u + \eta_t \\
&\zeta_1 = u_x\left(-u_t\tau_u + \eta_u - \xi_x\right) - u_x^2\xi_u - u_t\tau_x + \eta_x \\
&\zeta_2 = u_x^2\left(-u_t\tau_{uu} + \eta_{uu} - 2\xi_{xu}\right) + u_x\left(-3u_{xx}\xi_u - 2u_{tx}\tau_u - 2u_t\tau_{xu} + 2\eta_{xu} - \xi_{xx}\right) \\
&\quad + u_{xx}\left(-u_t\tau_u + \eta_u - 2\xi_x\right) - u_x^3\xi_{uu} - 2u_{tx}\tau_x - u_t\tau_{xx} + \eta_{xx} \\
&\zeta_3 = u_x^3\left(-u_t\tau_{uuu} + \eta_{uuu} - 3\xi_{xuu}\right) + u_x^2\left(-6u_{xx}\xi_{uu} - 3u_{tx}\tau_{uu} - 3u_t\tau_{xuu} + 3\eta_{xuu} - 3\xi_{xxu}\right) \\
&\quad + u_x[-4u_{xxx}\xi_u - 3u_{txx}\tau_u - 6u_{tx}\tau_{xu} - 3u_t\tau_{xxu} + 3\eta_{xxu} - \xi_{xxx} \\
&\quad + u_{xx}(-3u_t\tau_{uu} + 3\eta_{uu} - 9\xi_{xu})] - 3u_{xx}^2\xi_u - 3u_{txx}\tau_x - 3u_{tx}\tau_{xx} - u_t\tau_{xxx} + \eta_{xxx} \\
&\quad + u_{xxx}\left(-u_t\tau_u + \eta_u - 3\xi_x\right) + u_{xx}\left(-3u_{tx}\tau_u - 3u_t\tau_{xu} + 3\eta_{xu} - 3\xi_{xx}\right) + u_x^4\left(-\xi_{uuu}\right)
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

## A.2　(2+1) 维 KdV 型方程的延拓无穷小具体结果

$$\eta_t^{(1)} = u_t\eta_u - u_y\left(u_t\mu_u + \mu_t\right) - u_x\left(u_t\xi_u + \xi_t\right) - u_t\left(u_t\tau_u + \tau_t\right) + \eta_t \tag{A.2}$$

$$\eta_x^{(1)} = u_x\eta_u - u_y\left(u_x\mu_u + \mu_x\right) - u_x\left(u_x\xi_u + \xi_x\right) - u_t\left(u_x\tau_u + \tau_x\right) + \eta_x \tag{A.3}$$

$$\eta_y^{(1)} = u_y\eta_u - u_y\left(u_y\mu_u + \mu_y\right) - u_x\left(u_y\xi_u + \xi_y\right) - u_t\left(u_y\tau_u + \tau_y\right) + \eta_y \tag{A.4}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{xy}^{(2)} =\, & u_{xy}\eta_u + u_x(u_y\eta_{uu} + \eta_{yu}) + u_y\eta_{xu} - u_{xy}(u_y\mu_u + \mu_y) - u_{yy}(u_x\mu_u + \mu_x) \\
& - u_y(u_{xy}\mu_u + u_x(u_y\mu_{uu} + \mu_{yu}) + u_y\mu_{xu} + \mu_{xy}) - u_{xx}(u_y\xi_u + \xi_y) \\
& - u_{xy}(u_x\xi_u + \xi_x) - u_x(u_{xy}\xi_u + u_x(u_y\xi_{uu} + \xi_{yu}) + u_y\xi_{xu} + \xi_{xy}) \\
& - u_{tx}(u_y\tau_u + \tau_y) - u_{ty}(u_x\tau_u + \tau_x) - u_t(u_{xy}\tau_u + u_x(u_y\tau_{uu} + \tau_{yu}) \\
& + u_y\tau_{xu} + \tau_{xy}) + \eta_{xy}
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta^{(3)}_{xyy} =& u_{xyy}\eta_u - 2u_{xyy}(u_y\mu_u + \mu_y) - 2u_{xxy}(u_y\xi_u + \xi_y) - 2u_{txy}(u_y\tau_u + \tau_y) \\
&+ 2u_{xy}(u_y\eta_{uu} + \eta_{yu}) - u_{xy}(u_{yy}\mu_u + u_y\mu_{yu} + u_y(u_y\mu_{uu} + \mu_{yu}) + \mu_{yy}) \\
&- u_{xx}(u_{yy}\xi_u + u_y\xi_{yu} + u_y(u_y\xi_{uu} + \xi_{yu}) + \xi_{yy}) - u_{tx}(u_{yy}\tau_u + u_y\tau_{yu} \\
&+ u_y(u_y\tau_{uu} + \tau_{yu}) + \tau_{yy}) + u_x(u_{yy}\eta_{uu} + u_y\eta_{yuu} + u_y(u_y\eta_{uuu} + \eta_{yuu}) + \eta_{yyu}) \\
&- u_{yyy}(u_x\mu_u + \mu_x) - u_{xyy}(u_x\xi_u + \xi_x) - u_{tyy}(u_x\tau_u + \tau_x) + u_{yy}\eta_{xu} \\
&- 2u_{yy}(u_{xy}\mu_u + u_x(u_y\mu_{uu} + \mu_{yu}) + u_y\mu_{xu} + \mu_{xy}) - 2u_{xy}(u_{xy}\xi_u \\
&+ u_x(u_y\xi_{uu} + \xi_{yu}) + u_y\xi_{xu} + \xi_{xy}) - 2u_{ty}(u_{xy}\tau_u + u_x(u_y\tau_{uu} + \tau_{yu}) \\
&+ u_y\tau_{xu} + \tau_{xy}) + u_y\eta_{xyu} + u_y(u_y\eta_{xuu} + \eta_{xyu}) + \eta_{xyy} \\
&- u_y(u_{xyy}\mu_u + 2u_{xy}(u_y\mu_{uu} + \mu_{yu}) + u_x(u_{yy}\mu_{uu} + u_y\mu_{yuu} \\
&+ u_y(u_y\mu_{uuu} + \mu_{yuu}) + \mu_{yyu}) + u_{yy}\mu_{xu} + u_y\mu_{xyu} \\
&+ u_y(u_y\mu_{xuu} + \mu_{xyu}) + \mu_{xyy}) - u_x(u_{xyy}\xi_u + 2u_{xy}(u_y\xi_{uu} + \xi_{yu}) \\
&+ u_x(u_{yy}\xi_{uu} + u_y\xi_{yuu} + u_y(u_y\xi_{uuu} + \xi_{yuu}) + \xi_{yyu}) + u_{yy}\xi_{xu} + u_y\xi_{xyu} \\
&+ u_y(u_y\xi_{xuu} + \xi_{xyu}) + \xi_{xyy}) - u_t(u_{xyy}\tau_u + 2u_{xy}(u_y\tau_{uu} + \tau_{yu}) \\
&+ u_x(u_{yy}\tau_{uu} + u_y\tau_{yuu} + u_y(u_y\tau_{uuu} + \tau_{yuu}) + \tau_{yyu}) \\
&+ u_{yy}\tau_{xu} + u_y\tau_{xyu} + u_y(u_y\tau_{xuu} + \tau_{xyu}) + \tau_{xyy})
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta^{(3)}_{xxy} =& u_{xxy}\eta_u - u_{xxy}(u_y\mu_u + \mu_y) - u_{xxx}(u_y\xi_u + \xi_y) - u_{txx}(u_y\tau_u + \tau_y) \\
&+ u_{xx}(u_y\eta_{uu} + \eta_{yu}) - 2u_{xyy}(u_x\mu_u + \mu_x) - 2u_{xxy}(u_x\xi_u + \xi_x) \\
&- 2u_{txy}(u_x\tau_u + \tau_x) + u_{xy}\eta_{xu} + u_{xy}(u_x\eta_{uu} + \eta_{xu}) - u_{xy}(u_{xy}\mu_u \\
&+ u_x(u_y\mu_{uu} + \mu_{yu}) + u_y\mu_{xu} + \mu_{xy}) - u_{xy}(u_{xy}\mu_u + u_x\mu_{yu} \\
&+ u_y(u_x\mu_{uu} + \mu_{xu}) + \mu_{xy}) - u_{xx}(u_{xy}\xi_u + u_x(u_y\xi_{uu} + \xi_{yu}) \\
&+ u_y\xi_{xu} + \xi_{xy}) - u_{xx}(u_{xy}\xi_u + u_x\xi_{yu} + u_y(u_x\xi_{uu} + \xi_{xu}) + \xi_{xy}) \\
&- u_{tx}(u_{xy}\tau_u + u_x(u_y\tau_{uu} + \tau_{yu}) + u_y\tau_{xu} + \tau_{xy}) - u_{tx}(u_{xy}\tau_u \\
&+ u_x\tau_{yu} + u_y(u_x\tau_{uu} + \tau_{xu}) + \tau_{xy}) \\
&+ u_x\eta_{xyu} + u_x(u_{xy}\eta_{uu} + u_x\eta_{yuu} + u_y(u_x\eta_{uuu} + \eta_{xuu}) + \eta_{xyu}) \\
&- u_{yy}(u_{xx}\mu_u + u_x\mu_{xu} + u_x(u_x\mu_{uu} + \mu_{xu}) + \mu_{xx}) \\
&- u_{xy}(u_{xx}\xi_u + u_x\xi_{xu} + u_x(u_x\xi_{uu} + \xi_{xu}) + \xi_{xx}) \\
&- u_{ty}(u_{xx}\tau_u + u_x\tau_{xu} + u_x(u_x\tau_{uu} + \tau_{xu}) + \tau_{xx}) \\
&+ u_y(u_x\eta_{xuu} + \eta_{xxu}) + \eta_{xxy} - u_y(u_{xxy}\mu_u + u_{xx}(u_y\mu_{uu} + \mu_{yu}) \\
&+ u_{xy}\mu_{xu} + u_{xy}(u_x\mu_{uu} + \mu_{xu}) + u_x\mu_{xyu} + u_x(u_{xy}\mu_{uu} + u_x\mu_{yuu} \\
&+ u_y(u_x\mu_{uuu} + \mu_{xuu}) + \mu_{xyu}) + u_y(u_x\mu_{xuu} + \mu_{xxu}) + \mu_{xxy}) \\
&- u_x(u_{xxy}\xi_u + u_{xx}(u_y\xi_{uu} + \xi_{yu}) + u_{xy}\xi_{xu} + u_{xy}(u_x\xi_{uu} + \xi_{xu}) \\
&+ u_x\xi_{xyu} + u_x(u_{xy}\xi_{uu} + u_x\xi_{yuu} + u_y(u_x\xi_{uuu} + \xi_{xuu}) + \xi_{xyu}) \\
&+ u_y(u_x\xi_{xuu} + \xi_{xxu}) + \xi_{xxy}) - u_t(u_{xxy}\tau_u + u_{xx}(u_y\tau_{uu} + \tau_{yu}) \\
&+ u_{xy}\tau_{xu} + u_{xy}(u_x\tau_{uu} + \tau_{xu}) + u_x\tau_{xyu} + u_x(u_{xy}\tau_{uu} + u_x\tau_{yuu} \\
&+ u_y(u_x\tau_{uuu} + \tau_{xuu}) + \tau_{xyu}) + u_y(u_x\tau_{xuu} + \tau_{xxu}) + \tau_{xxy})
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

# 参考文献


[1] 段文山 赵金保吕克璞, 石玉仁. Kdv-burgers 方程的孤波解. *物理学报*, 50(11):2074--2076, 2001.

[2] 郭玉翠. *非线性微分方程引论*. 清华大学出版社, 北京, 2008.

[3] 杜海清. Kdv-burgers 方程的对称与孤子解. *大学数学*, 24(6):80--83, 2008.

[4] G Baumann. Symmetry analysis of differential equations with mathematica. *MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING*, 25(8-9):25--37, APR-MAY 1997.

[5] G. Bluman. A reduction algorithm for an ordinary differential-equation admitting a solvable lie group. *Siam Journal on Applied Mathematics*, 50(6):1689--1705, 1990. Times Cited: 2 0 2.

[6] G. Bluman. Simplifying the form of lie-groups admitted by a given differential-equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 145(1):52--62, 1990. Times Cited: 18 0 18.

[7] G.W. Bluman and S.C. Anco. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[8] G.W. Bluman and J.D. Cole. *Similarity Methods for Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1974.

[9] J.M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, 1(1):171--199, 1948.

[10] Mehmet Can. Lie symmetries of differential equations by computer algebra. *Mathematical and Computational Applications*, 1:5, 1996.

[11] F. Casas. Solution of linear partial differential equations by lie algebraic methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 76(1-2):159--170, 1996. Times Cited: 6 Casas, Fernando/G-1588-2011 0 6.

[12] P. A. Clarkson. Nonclassical symmetry reductions of nonlinear partial-differential equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 18(10):45--68, 1993. Times Cited: 12 0 15.

[13] Mark Craddock and Kelly A. Lennox. Lie group symmetries as integral transforms of fundamental solutions. *Journal of Differential Equations*, 232(2):652--674, 2007. Times Cited: 20 0 21.

[14] S.C. 安科 G.W. 布卢曼. *微分方程的对称与积分方法*. 科学出版社, 北京, 2009.

[15] W. Hereman. Review of symbolic software for lie symmetry analysis. *Mathematical and Computer Modelling*, 25(8-9):115--132, 1997. Times Cited: 27 Hereman, Willy/E-7783-2010 Hereman, Willy/0000-0001-7997-6601 1 29.

[16] Nail H. Ibragimov. *微分方程与数学物理问题*. 高等教育出版社, 北京, 2009.

[17] Arieh Iserles, Hans Z. Munthe-Kaas, N, Syvert P. oslash;rsett, and Antonella Zanna. Lie-group methods. *Acta Numerica*, 9:215--365, 1 2000.

[18] N. M. Ivanova, C. Sophocleous, and R. Tracina. Lie group analysis of two-dimensional variable-coefficient burgers equation. *ZEITSCHRIFT FUR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND PHYSIK*, 61(5):793--809, OCT 2010.

[19] J. Jena. Group theoretic method for analyzing interaction of a weak discontinuity wave with a bore in shallow water waves. *Applicable Analysis*, 84(1):37--48, 2005.

[20] J. Jena. Lie-group theoretic method for analyzing interaction of discontinuous waves in a relaxing gas. *ZEITSCHRIFT FUR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND PHYSIK*, 58(3):416--430, MAY 2007.

[21] J. Jena. An algorithm for solutions of linear partial differential equations via lie group of transformations. *Applied Mathematical Sciences*, 5(27):1337--1347, 2011.

[22] J Jena and VD Sharma. Lie transformation group solutions of non-linear equations describing viscoelastic materials. *INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCE*, 35(10-11):1033--1044, AUG-SEP 1997.

[23] J Jena and VD Sharma. Self-similar shocks in a dusty gas. *INTERNATIONAL JOURNAL OF NON-LINEAR MECHANICS*, 34(2):313--327, MAR 1999.

[24] M. S. Joshi. *The Concepts and Practice of Mathematical Finance, Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[25] J. David Logan and José de Jesús Pérez. Similarity solutions for reactive shock hydrodynamics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 39(3):512--527, 1980.

[26] Gianni Manno, Francesco Oliveri, Giuseppe Saccomandi, and Raffaele Vitolo. Ordinary differential equations described by their lie symmetry algebra. *JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS*, 85:2--15, NOV 2014.

[27] Peter J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations (Second Edition)*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[28] Peter J. Olver and Philip Rosenau. Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(2):263--278, 1987.

[29] L.V. Ovsiannikov. *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press, New York, 1982.

[30] V. D. Sharma and C.H. Radha. Similarity solutions for converging shocks in a relaxing gas. *International Journal of Engineering Science*, 33(4):535 -- 553, 1995.

[31] ES SUHUBI and A BAKKALOGLU. Group properties and similarity solutions for a quasi-linear wave-equation in the plane. *INTERNATIONAL JOURNAL OF NON-LINEAR MECHANICS*, 26(5):567--584, 1991.

[32] Hong Wang and Ying-Hui Tian. Non-lie symmetry groups and new exact solutions of a (2+1)-dimensional generalized broer-kaup system. *COMMUNICATIONS IN NONLINEAR SCIENCE AND NUMERICAL SIMULATION*, 16(10):3933--3940, OCT 2011.

[33] Abdul-Majid Wazwaz. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Higher Education Press, Beijing, 2009.

[34] YX Xie and JS Tang. New solitary wave solutions to the kdv-burgers equation. *INTERNATIONAL JOURNAL OF THEORETICAL PHYSICS*, 44(3):293--301, MAR 2005.

[35] Zhihong Zhao and Weigao Ge. Symmetry analysis of reaction diffusion equation with distributed delay. *COMMUNICATIONS IN NONLINEAR SCIENCE AND NUMERICAL SIMULATION*, 24(1-3):11--20, JUL 2015.

# 致　谢

韶光荏苒，翘首往事，一切又历历在目。本科学习的这篇乐谱即将以一个休止符告一段落，在此过程中，有失落、高潮、迷茫和更多的感动，使我不断地成长，谨以此向陪伴我谱写成长之曲的家人、恩师、同窗和挚友们，致以衷心的敬意和感谢！

本研究及学位论文是在导师沈守枫教授的亲切关怀和悉心指导下完成。科研上，他严肃的科学态度，严谨的治学精神，精益求精的工作作风，深深地感染着我；生活中，他淡然的生活态度，风趣的性格，拉近了我们的距离。非常感谢沈老师两年以来的言传身教，感谢沈老师在知识的海洋中为我指路。

在此文撰写过程中，以下的组织或个人让我受益匪浅，在此致以诚挚的谢意：感谢 LaTeX，XeTeX 团队为本文精美而又免费的排版提供技术支持；感谢 John MacFarlane (Pandoc 作者，U.C. Berkeley 教授) 和 Pandoc 的其他维护者为本文的撰写及多格式转化 (转成 Microsoft Word) 提供了极大的便利；感谢 Bram Moolenaar (Vim 作者) 提供了如此优秀的编辑器，让码字成为如此享受的乐事；感谢 Guido van Rossum (Python 作者) 为本文的参考文献管理程序的编写提供了可能；感谢 Quora，StackOverflow，MathOverflow 等论坛为此文撰写过程所出现问题的快速解决提供了无私的帮助。

四年的学习生涯离不开下面这些可爱的人们，谢谢你们的陪伴！感谢浙江工业大学图书馆及图书馆四楼的老师们，是你们为我提供了舒适温馨的求知场所，为我的学习提供了保证。感谢陆盈颖、王雨丰、缪静瑜、王鸣山、王福东、章舒垚、叶宸、郑敏、吴锴锴、黄玲君、傅杭波等同窗好友，是你们的陪伴让我的生活更加多彩！最后，我要感谢父母、祖母、姑姑等亲戚们对我学生时代无微不至的照料和关爱，让我健康茁壮成长！谢谢！