几类特殊区域上的加权Hardy型不等式*

应雪海†, 金理宝‡, 周长§, 楼军¶

(浙江工业大学理学院应用数学系，浙江杭州，310023)

摘要：本文通过运用函数极值求解和选取特殊向量场的方法，分别得到了欧氏空间中平均凸区域和非凸区域上的加权Hardy不等式，从而推广了一些最近的科研成果。

关键词：加权Hardy型不等式；平均凸区域；非凸区域

中图分类号：O178　　**文献标识码**：A

1 简介

众所周知，各种不同类型的Hardy型不等式在数学多个领域发挥着非常重要的作用。假设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为一个有界凸区域，则对所有的$u \in C_0^\infty(\Omega)$，成立以下的Hardy不等式：

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}dx,$$

这里$\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$为到边界的距离函数，而且$\frac{1}{4}$是最佳常数，但不可达。这就启发大家考虑以上不等式是不是右边还能增加一些正的余项。文献 [1]首先获得了此类带有余项的Hardy不等式：

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}dx + \lambda(\Omega)\int_\Omega |u(x)|^2 dx,$$

这里

$$\lambda(\Omega) \geq \frac{1}{4\mathrm{diam}^2(\Omega)}.$$

其中diam(Ω)为区域Ω的直径。

文献 [2]得到了Heisenberg群H_n上的$L^2 -$ Hardy不等式：

$$\int_{H_n} |\nabla_{H_n}\Phi|^2 dx \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right)^2 \int_{H_n} \left(\frac{|z|}{d}\right)^2 \frac{|\Phi(x,y,t)|^2}{d^2}dx,$$

文献 [3]将它的结果推广到更一般的L^p上，得到了Heisenberg群H_n上的$L^p -$Hardy不等式。

*本课题由浙江工业大学大学生创新训练计划资金支持。

†应雪海（1993- ），男，汉族，浙江杭州人，本科三年级。

‡金理宝（1993- ），男，汉族，浙江温州人，本科三年级。

§周长（1993- ），男，汉族，浙江乐清人，本科三年级。

¶楼军（1991- ），男，汉族，浙江杭州人，本科三年级。

文献 [4]则是得到与边界距离相关的带余项的Hardy不等式，令$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为一平均凸区域，设$H_0:=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}H(x)\geq 0$，则对于$\forall f\in C_0^\infty(\Omega)$，$p>1$，有如下不等式成立：

$$\int_\Omega|\nabla f|^p dx\geq\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\int_\Omega\frac{|f|^p}{\delta^p}dx+\lambda(n,p,\Omega)\int_\Omega|f|^p dx.$$

其中$\lambda(n,p,\Omega)=\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\inf\limits_{\Omega\backslash S}\frac{-\Delta\delta}{\delta^{p-1}}\geq\frac{p}{n^{p-1}}H_0^p$.

文献 [6, 7]得到L^p-Hardy不等式：设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为一具有非空边界的区域，同时满足$n\geq 1$，$1<p<\infty$且$\delta(x):=\inf_{y\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega}\mathrm{dist}(x,y)$，有

$$\int_\Omega|\nabla f(x)|^p dx\geq\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\int_\Omega\frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^p}dx,\quad f\in C_0^\infty(x),$$

其中$\left(\frac{p-1}{p}\right)^p$是最佳常数。

文献 [8]得到L^p情形下带余项的Hardy不等式，在$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，$1<p<n$的条件下满足以下不等式：

$$\int_\Omega|\nabla u|^p dx-\left(\frac{n-p}{p}\right)^p\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^p}dx\geq C_{n,p}\left(\frac{\omega_n}{|\Omega|}\right)^{p/n}\int_\Omega|u|^p dx,$$

其中常数$C_{n,p}>0$

以上Hardy不等式都是在严格凸区域内得到的，在文献 [4]中，Li Yanyan等作者研究了比凸区域更广的平均凸区域上的一些带余项的Hardy不等式。其中不等式前面的系数与边界上的平均曲率有关，目前，国内外对在平均凸区域和非凸区域上的Hardy不等式的研究相对较少，但其与区域的几何量有关，因此受到了越来越多的关注，详见文献 [1–3, 5]。本文主要对凸区域和非凸区域进行相关研究。

文献 [4, 9]分别讨论了欧氏空间中一类平均凸区域和非凸区域上的Hardy不等式，并得到了关于Hardy不等式的一系列结果。

本文运用基本不等式，函数极值求解，选取特殊向量场的方法，分别对文献 [4, 9]中的结论进行加权推广，得到了一些新的Hardy型不等式。

2 平均凸区域上的分数阶加权Hardy型不等式

定义 2.1 假设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是具有$C^2$边界的区域，$\Omega$或$\partial\Omega$是严格平均凸的，如果$\forall y\in\partial\Omega$均成立：平均曲率$H(y)>0$。

定义 2.2 令$G\subset\Omega$为Ω中最大开子集，且G中任意x有唯一对应于$\partial\Omega$上的最近的点，称G为奇异集。

G的补集记为$S=\Omega\backslash G$。

本节先给出一些引理，再给出本节主要定理的证明。

引理 2.1 设$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$为一平均凸区域，则对于$\forall f \in C_0^\infty(\Omega)$，$0 \le \alpha < 1$，成立：

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \cdot \delta^\alpha dx - \frac{(1-\alpha)^2}{4}\int_\Omega \frac{f^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha dx = \int_\Omega \left|\nabla f - \frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{f\nabla\delta}{\delta}\right|^2 \delta^\alpha dx + (1-\alpha)\int_\Omega \nabla\delta\nabla\left(\frac{f^2}{2\delta}\cdot\delta^\alpha\right)dx, \tag{2.1}$$

证明. 当$f \in C_0^\infty(\Omega)$时，$\dfrac{f^2}{\delta}$在区域Ω上满足Lipschitz条件，从而在区域Ω上a.e.有$|\nabla\delta| = 1$，则可以得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\delta\nabla\left(\frac{f^2}{2\delta}\cdot\delta^\alpha\right)dx &= \int_\Omega \frac{f\nabla\delta\nabla f}{\delta}\cdot\delta^\alpha dx - \frac{1-\alpha}{2}\int_\Omega \frac{f^2|\nabla\delta|^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha dx \\ &= \int_\Omega \frac{f\nabla\delta\nabla f}{\delta}\cdot\delta^\alpha dx - \frac{1-\alpha}{2}\int_\Omega \frac{f^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha dx,\end{aligned} \tag{2.2}$$

利用基本等式

$$|X|^2 - |Y|^2 = |X-Y|^2 + 2 < X, Y > -2|Y|^2,$$

令$X = \nabla f\cdot\delta^{\frac{\alpha}{2}}, Y = \dfrac{1-\alpha}{2}\cdot\dfrac{f\nabla\delta}{\delta}\cdot\delta^{\frac{\alpha}{2}}$，则可得如下等式

$$|\nabla f|^2\cdot\delta^\alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{4}\frac{f^2|\nabla\delta|^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha = \left|\nabla f - \frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{f\nabla\delta}{\delta}\right|^2\delta^\alpha + (1-\alpha)\frac{f\nabla f\nabla\delta}{\delta}\cdot\delta^\alpha - \frac{(1-\alpha)^2}{2}\frac{f^2|\nabla\delta|^2}{\delta^2}\delta^\alpha, \tag{2.3}$$

整合后可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla f|^2\cdot\delta^\alpha dx - \frac{(1-\alpha)^2}{4}\int_\Omega\frac{f^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha dx \\ &= \int_\Omega\left|\nabla f - \frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{f\nabla\delta}{\delta}\right|^2\delta^\alpha dx + (1-\alpha)\int_\Omega\frac{f\nabla\delta\nabla f}{\delta}\cdot\delta^\alpha dx - \frac{(1-\alpha)^2}{2}\int_\Omega\frac{f^2|\nabla\delta|^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha dx \\ &= \int_\Omega\left|\nabla f - \frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{f\nabla\delta}{\delta}\right|^2\delta^\alpha dx + (1-\alpha)\int_\Omega\nabla\delta\nabla\left(\frac{f^2}{2\delta}\cdot\delta^\alpha\right)dx,\end{aligned}$$

其中最后一步运用(2.2)得到。 □

引理 2.2 ([4]) 令$n \ge 1$，$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$，且$\delta(x) := \inf_{y\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\Omega}\mathrm{dist}(x,y)$，则在分布意义下成立：

$$-\Delta\delta(x) \ge \frac{nH(x)}{n-\delta H(x)},$$

即对于$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi \ge 0$，成立

$$\int_\Omega \nabla\delta\nabla\varphi dx \ge \int_\Omega \frac{nH}{n-\delta H}\varphi dx,$$

其中$H(y)$是点y（$y = N(x) \in \partial\Omega$）的平均曲率，其中点$y$是区域$\Omega$内点$x$（$x \in G$）对应于边界距离最近的唯一的点。

定理 2.1 令$\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$为一平均凸区域，设$H_0:=\inf_{x\in\partial\Omega}H(x)\geq 0$，对于$\forall f\in C_0^\infty(\Omega)$，$0\leq\alpha<1$，有如下不等式成立：

$$\int_\Omega |\nabla f|^2\cdot\delta^\alpha dx\geq\frac{(1-\alpha)^2}{4}\int_\Omega\frac{|f|^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha dx+\lambda(n,\alpha,\Omega)\int_\Omega |f|^2\cdot\delta^\alpha dx,$$

其中$\lambda(n,\alpha,\Omega)=(1-\alpha)\inf_{x\in\Omega}\frac{-\Delta\delta(x)}{2\delta(x)}\geq\frac{2(1-\alpha)}{n}H_0^2$。

附注： 当$\alpha=0$时，以上不等式即为文献 [4]中的主要不等式。

证明. 由引理2.2可得

$$\int_\Omega\nabla\delta\nabla\left(\frac{f^2}{2\delta}\cdot\delta^\alpha\right)dx\geq\int_\Omega\frac{nH}{n-\delta H}\left(\frac{f^2}{2\delta}\cdot\delta^\alpha\right)dx,\tag{2.4}$$

将(2.4)带入引理2.1可以得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla f|^2\cdot\delta^\alpha dx-\frac{(1-\alpha)^2}{4}\int_\Omega\frac{f^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha dx\\&\geq(1-\alpha)\int_\Omega\frac{nH}{n-\delta H}\left(\frac{f^2}{2\delta}\cdot\delta^\alpha\right)dx+\int_\Omega\left|\nabla f-\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{f\nabla\delta}{\delta}\right|^2\delta^\alpha dx\\&\geq(1-\alpha)\int_\Omega\frac{nH}{n-\delta H}\left(\frac{f^2}{2\delta}\cdot\delta^\alpha\right)dx,\end{aligned}\tag{2.5}$$

现在假设$H_0>0$，否则当$H_0=0$时，定理2.1显然成立。令$\phi(t):=\frac{1}{at-t^2}$，其中$a>0$。运用基本不等式可以得到：

$$\phi(t)\geq\frac{4}{a^2},\tag{2.6}$$

对于$\forall t\in(0,a)$成立, 其中$t_0=\frac{a}{2}$时，$\phi(t)$取到最小值。

令$a=\frac{n}{H}$和$t=\delta$，则当$x\in G$时$\frac{H}{(n-\delta H)\delta}\geq\frac{4H^2}{n^2}$成立，同时利用$\Omega\backslash G$为零测度集得到：

$$\int_\Omega\frac{nH}{n-\delta H}\left(\frac{f^2}{2\delta}\cdot\delta^\alpha\right)dx\geq\int_\Omega\frac{2}{n}H^2f^2\delta^\alpha dx,\tag{2.7}$$

把(2.7)代入(2.5)中可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla f|^2\cdot\delta^\alpha dx-\frac{(1-\alpha)^2}{4}\int_\Omega\frac{f^2}{\delta^2}\cdot\delta^\alpha dx&\geq(1-\alpha)\int_\Omega\frac{2}{n}H^2f^2\delta^\alpha dx\\&\geq\frac{2(1-\alpha)}{n}H_0^2\int_\Omega f^2\delta^\alpha dx,\end{aligned}\tag{2.8}$$

因而，定理2.1得证。 □

接下来证明L^p 情形的Hardy型不等式，在凸区域中，下面的方法在文献 [5]中首次被使用。

引理 2.3 令$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为一平均凸区域，则对于$\forall f \in C_0^\infty(\Omega)$，$p > 1$，$0 \le \alpha < 1$，如下不等式成立：

(2.9)
$$\int_\Omega |\nabla f|^p \cdot \delta^\alpha dx - \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^p} \cdot \delta^\alpha dx \ge \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^{p-1} \int_\Omega \nabla\delta\nabla\left(\frac{|f|^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right) dx,$$

证明. 利用基本不等式

$$|X|^p - |Y|^p \ge p|Y|^{p-2} < X - Y, Y >, \tag{2.10}$$

令$X = \nabla f \cdot \delta^{\frac{\alpha}{p}}, Y = \frac{p-1-\alpha}{p} \cdot \frac{f\nabla\delta}{\delta} \cdot \delta^{\frac{\alpha}{p}}$，则由$X - Y = \delta^{\frac{p-1}{p}} \nabla \frac{f}{\delta^{\frac{p-1-\alpha}{p}}}$ 可得如下不等式

(2.11)
$$|\nabla f|^p \delta^\alpha - \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^p \frac{|f|^p |\nabla\delta|^p}{\delta^p} \cdot \delta^\alpha \ge \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^{p-1} |\nabla\delta|^{p-2} \nabla\delta\nabla\left(\frac{|f|^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right),$$

利用$|\nabla\delta| = 1$，推出(2.9)，即引理2.3得证。 □

接下来证明在平均凸域下Brezis-Marcus型的L^p加权Hardy型不等式。

定理 2.2 令$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}(n \ge 1)$，设$\Omega$为一平均凸区域，则对于$\forall f \in C_0^\infty(\Omega)$，$p > 1$，$0 \le \alpha < 1$，有如下不等式成立：

$$\int_\Omega |\nabla f|^p \cdot \delta^\alpha dx \ge \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^p} \cdot \delta^\alpha dx + \lambda(n, \alpha, \Omega) \int_\Omega |f|^p \cdot \delta^\alpha dx, \tag{2.12}$$

其中$\lambda(n, p, \alpha, \Omega) = \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^{p-1} \inf_{\Omega\setminus S} \frac{-\Delta\delta}{\delta^{p-1}} \ge \left(\frac{p-1-\alpha}{p-1}\right)^{p-1} \frac{p}{n^{p-1}} H_0^p$。

附注： 当$\alpha = 0$时，以上不等式即为文献 [4]中的主要不等式。

证明. 证明过程类似于L^2情形下的证明。由(2.4)和(2.9)得到同样的推论，通过观察可得：

$$\int_\Omega \nabla\delta\nabla\left(\frac{f^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right) dx \ge \int_\Omega \frac{nH}{n - \delta H}\left(\frac{f^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right) dx, \tag{2.13}$$

将(2.13)带入引理2.3的(2.9)可以得到(2.14)

(2.14)
$$\int_\Omega |\nabla f|^p \cdot \delta^\alpha dx - \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^p} \cdot \delta^\alpha dx \ge \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^{p-1} \int_\Omega \frac{nH}{n - \delta H}\left(\frac{f^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right) dx,$$

令$\phi(t) := \frac{1}{at^{p-1} - t^p}$，其中$p > 1$，$a > 0$。运用基本不等式可以得到：

$$\phi(t) \ge \frac{p}{a^p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}, \tag{2.15}$$

对于$\forall t \in (0,a)$ 成立其中$t_0 = a\dfrac{p-1}{p}$ 时，$\phi(t)$ 取到最小值。

现在假设$H_0 > 0$，否则当$H_0 = 0$ 时，定理2.2得证。令$a = \dfrac{n}{H}$ 和$t = \delta$，则当$x \in G$ 时$\dfrac{H}{(n-\delta H)\delta^{p-1}} \geq \dfrac{pH^p}{n^p}\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^{p-1}$ 成立，同时利用$\Omega \backslash G$ 为零测度集得到：

$$\int_\Omega \frac{nH}{n-\delta H}\left(\frac{|f|^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right)dx \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{p}{n^{p-1}}\int_\Omega H^p|f|^p\delta^\alpha dx, \tag{2.16}$$

把(2.16)代入(2.9)中可得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla f|^p \cdot \delta^\alpha dx - \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^p \int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^p} \cdot \delta^\alpha dx \\ \geq &\left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^{p-1}\int_\Omega \nabla\delta\nabla\left(\frac{|f|^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right)dx \\ \geq &\left(\frac{p-1-\alpha}{p-1}\right)^{p-1}\frac{p}{n^{p-1}}H_0^p\int_\Omega |f|^p\delta^\alpha dx, \end{aligned} \tag{2.17}$$

定理2.2得证。 □

定理 2.3 设$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$，$n \geq 1$，$H_0 := \inf_{y\in\partial\Omega} H(y) < 0$，对于$\forall f \in C_0^\infty(\Omega)$，$p > 1$，$0 \leq \alpha < 1$，有如下不等式成立：

$$\int_\Omega |\nabla f|^p \cdot \delta^\alpha dx + \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^{p-1}|H_0|\int_\Omega\left(\frac{f^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right)dx \geq \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^p\int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^p} \cdot \delta^\alpha dx. \tag{2.18}$$

证明. 证明过程与平均凸区域下的证明相同。唯一需要注意的是函数$\dfrac{nH_0}{n-\delta H_0}$ 在$H_0 \in \mathbb{R}$ 时关于δ 是单调的，在建立的G 中得到

$$\frac{nH_0}{n-\delta H_0} \geq H_0, \tag{2.19}$$

把(2.19)代入(2.14)，过程相同，可得

$$\int_\Omega |\nabla f|^p \cdot \delta^\alpha dx \geq \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^p\int_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^p} \cdot \delta^\alpha dx + \left(\frac{p-1-\alpha}{p}\right)^{p-1}H_0\int_\Omega\left(\frac{f^p}{\delta^{p-1}} \cdot \delta^\alpha\right)dx, \tag{2.20}$$

当$H_0 < 0$ 时，把(2.20)最后一项移到不等式左边，则定理2.3得证。 □

3 非凸区域上的加权Hardy型不等式

文献 [9]给出非凸区域上的一类Hardy型不等式，本节将对其进行加权推广。首先证明以下引理：

引理 3.1 设$\Omega \subset R^d$ 为一凸区域，$F(x)$ 为Ω 上的一个可微的向量函数，当$x \in$ suppu 时，$F(x)$ 和$divF(x)$ 是有限的，且$-d < \alpha < d$，则对$u \in C_0^\infty(\Omega)$，成立：

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \left(2divF(x) - \frac{|F(x)|^2}{|x|^\alpha}\right)|u(x)|^2 dx \le \int_\Omega |\nabla u|^2|x|^\alpha dx, \tag{3.21}$$

证明. 根据散度定理和柯西-施瓦茨不等式，有

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega divF(x)|u(x)|^2 dx\right)^2 &= \left(\int_\Omega F(x)\cdot\nabla\left(|u(x)|^2\right)dx\right)^2\\ &\le 4\int_\Omega |\nabla u|^2|x|^\alpha dx \int_\Omega \frac{|F(x)|^2|u(x)|^2}{|x|^\alpha}dx,\end{aligned}$$

利用基本不等式，则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_\Omega\left(2divF(x) - \frac{|F(x)|^2}{|x|^\alpha}\right)|u(x)|^2dx &\le \frac{1}{4}\frac{\left(\int_\Omega divF(x)|u(x)|^2dx\right)^2}{\int_\Omega \frac{|F(x)|^2|u(x)|^2}{|x|^\alpha}dx}\\ &\le \int_\Omega |\nabla u|^2|x|^\alpha dx.\end{aligned}$$

□

下面给出主要结论的证明。

定理 3.1 $\Omega \subset R^d$ 为一有界凸区域，在Ω 中取一个球域$B_\rho = \{x : d(x,0) < \rho\}$，$x \in \Omega\backslash B_\rho$, $\delta_\rho(x) = \mathrm{dist}(x,\partial B_\rho) = d - \rho, \delta_\Omega = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$, $-d < \alpha < d$。那么对$\forall u \in C_0^\infty(\Omega\backslash B_\rho)$，有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash B_\rho}|\nabla u|^2|x|^\alpha dx \ge& \frac{1}{4}\int_{\Omega\backslash B_\rho}\left(\frac{(d-1)(d-3+2\alpha)}{|x|^2}\cdot|x|^\alpha + \frac{1}{\delta_\rho^2}\cdot|x|^\alpha + \frac{2-|x|^{-\alpha}}{\delta_\Omega^2}\right.\\ &\left. + \frac{2\alpha}{|x|\,\delta_\rho}\cdot|x|^\alpha + \frac{2(d-1)x\cdot\nabla\delta_\Omega}{|x|^2\delta_\Omega} - \frac{2\Delta\delta_\Omega}{\delta_\Omega} - \frac{2x\cdot\nabla\delta_\Omega}{|x|\,\delta_\rho\cdot\delta_\Omega}\right)|u(x)|^2dx,\end{aligned} \tag{3.22}$$

附注：当$\alpha = 0$ 时，以上不等式即为文献 [9]中的主要不等式。

证明. 取向量函数

$$F(x) = \frac{(d-1)\,x}{|x|^2}\cdot|x|^\alpha - \frac{\nabla\delta_\rho(x)}{\delta_\rho(x)}\cdot|x|^\alpha - \frac{\nabla\delta_\Omega(x)}{\delta_\rho(x)}, \tag{3.23}$$

因为$|\nabla\delta_\rho(x)| = |\nabla\delta_\Omega(x)| = 1$，

$$\begin{aligned}
div\left(\frac{(d-1)\,x}{|x|^2}\cdot|x|^\alpha\right) &= (d-1)\cdot\frac{d|x|^{2-\alpha}-(2-\alpha)|x|^{2-\alpha}}{\left(|x|^{2-\alpha}\right)^2}\\
&= \frac{(d-1)(d-2+\alpha)}{|x|^2}\cdot|x|^\alpha\\
div\left(\frac{\nabla\delta_\rho(x)}{\delta_\rho(x)}\cdot|x|^\alpha\right) &= \frac{div(\nabla\delta_\rho(x)\cdot|x|^\alpha)\cdot\delta_\rho(x)-|\nabla\delta_\rho(x)|^2|x|^\alpha}{\delta_\rho^2(x)}\\
&= \frac{(d-1+\alpha)|x|^{\alpha-1}}{\delta_\rho(x)}-\frac{(\nabla\delta_\rho(x))^2}{\delta_\rho^2(x)}\cdot|x|^\alpha\\
div\left(\frac{\nabla\delta_\Omega(x)}{\delta_\rho(x)}\right) &= \frac{\Delta\delta_\Omega(x)\cdot\delta_\rho(x)-|\nabla\delta_\Omega(x)|^2}{\delta_\Omega^2(x)},
\end{aligned}$$

可以得到

$$div\,F(x) = \frac{(d-1)(d-2+\alpha)}{|x|^2}\cdot|x|^\alpha+\frac{1}{\delta_\rho^2}\cdot|x|^\alpha+\frac{1}{\delta_\Omega^2}-\frac{d-1+\alpha}{|x|\,\delta_\rho}\cdot|x|^\alpha-\frac{\Delta\delta_\Omega}{\delta_\Omega},$$

又因为$\nabla\delta_\rho(x) = \dfrac{x}{|x|}$，

$$\begin{aligned}
F^2(x) =&\frac{(d-1)^2}{|x|^2}\cdot|x|^{2\alpha}+\frac{1}{\delta_\rho^2}\cdot|x|^{2\alpha}+\frac{1}{\delta_\Omega^2}+\frac{2x\cdot\nabla\delta_\Omega}{|x|\,\delta_\rho\cdot\delta_\Omega}\cdot|x|^\alpha\\
&-\frac{2(d-1)}{|x|\,\delta_\rho}\cdot|x|^{2\alpha}-\frac{2(d-1)x\cdot\nabla\delta_\Omega}{|x|^2\delta_\Omega}\cdot|x|^\alpha,
\end{aligned}$$

结合上两式，应用引理的结果，就有

(3.24)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\backslash B_\rho}|\nabla u|^2|x|^\alpha dx \geq&\frac{1}{4}\int_{\Omega\backslash B_\rho}\left(\frac{(d-1)(d-3+2\alpha)}{|x|^2}\cdot|x|^\alpha+\frac{1}{\delta_\rho^2}\cdot|x|^\alpha+\frac{2-|x|^{-\alpha}}{\delta_\Omega^2}\right.\\
&\left.+\frac{2\alpha}{|x|\,\delta_\rho}\cdot|x|^\alpha+\frac{2(d-1)x\cdot\nabla\delta_\Omega}{|x|^2\delta_\Omega}-\frac{2\Delta\delta_\Omega}{\delta_\Omega}-\frac{2x\cdot\nabla\delta_\Omega}{|x|\,\delta_\rho\cdot\delta_\Omega}\right)|u(x)|^2dx,
\end{aligned}$$

□

推论 3.1　取$\Omega = B_R = \{x : d(x,0) < R\}\,, R > \rho, \delta_R = \delta_\Omega = \text{dist}(x,\partial B_R) = R-|x|\,$,那么对$\forall u\in C_0^\infty(\Omega\backslash B_\rho)$，就有

$$\begin{aligned}
\int_{B_R\backslash B_\rho}|\nabla u|^2|x|^\alpha dx \geq&\frac{1}{4}\int_{B_R\backslash B_\rho}\left(\frac{(d-1)(d-3+2\alpha)}{|x|^2}\cdot|x|^\alpha+\frac{1}{\delta_\rho^2}\cdot|x|^\alpha\right.\\
&\left.+\frac{2-|x|^{-\alpha}}{\delta_\Omega^2}+\frac{2\alpha}{|x|\,\delta_\rho}\cdot|x|^\alpha+\frac{4}{|x|\,\delta_\Omega}+\frac{2}{\delta_\rho\cdot\delta_\Omega}\right)|u(x)|^2dx,
\end{aligned}\tag{3.25}$$

特别地，当$\rho\to 0$时，就会得到下面的加权Hardy不等式：

(3.26)

$$\int_{B_R}|\nabla u|^2|x|^\alpha dx \geq \frac{1}{4}\int_{B_R}\left(\frac{d^2+2\alpha d-4d+4}{|x|^2}\cdot|x|^\alpha+\frac{2-|x|^{-\alpha}}{\delta_\Omega^2}+\frac{6}{\delta_\rho\cdot\delta_\Omega}\right)|u(x)|^2dx,$$

推论 3.2 取$\Omega = B_R = \{x : d(x,0) < R\}$, 当半径$R$ 趋于正无穷时，可得到在外球域B_ρ^c 上的加权Hardy不等式：

(3.27)
$$\int_{B_\rho^c} |\nabla u|^2 |x|^\alpha dx \geq \frac{1}{4} \int_{B_\rho^c} \left(\frac{(d-1)(d-3+2\alpha)}{|x|^2} \cdot |x|^\alpha + \frac{2\alpha}{|x| \cdot \delta_\rho} \cdot |x|^\alpha + \frac{1}{\delta_\rho^2} \right) |u(x)|^2 dx.$$

致谢

本小组成员对浙江工业大学理学院金永阳教授的指导表示衷心的感谢。

参考文献

[1] Brezis H, Marcus M. Hardy's inequalities revisited[J]. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 1997,25(4):217-237.

[2] Garofalo N, Lanconelli E. Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation[J]. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1990,40:313-356.

[3] Niu P, Zhang H, Wang Y. Hardy type and Rellich type inequalities on the Heisenberg group[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2001,129(12):3623-3630.

[4] R. T. Lewis, J. Li, and Y. Li, A geometric characterization of a sharp Hardy inequality, J. Funct. Anal. 262 (2012), 3159–3185.

[5] Filippas, S.; Maz'ya, V.; Tertikas, A. On a question of Brezis and Marcus. Calc. Var.Partial Differential Equations 25 (2006), no. 4, 491-501.

[6] Marcus, M.; Mizel, V.J.; Pinchover, Y. On the best constant for Hardy's inequality in Rn. Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), no. 8, 3237-3255.

[7] Matskewich, T.; Sobolevskii. The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for convex domains in Rn. Nonlinear Anal. 28 (1997), no. 9, 1601-1610.

[8] Gazzola F., Grunau H.-Ch. and Mitidieri E. Hardy inequalities with optimal constants and remainder terms. Trans. Amer. Math. Soc., this issue.

[9] Farit Avkhadiev, Ari Laptev. Hardy inequalities for nonconvex domains[J]. International Mathematical Series, 2010,11:1-12.

Weighted Hardy Inequality on Several Special Domains

Xuehai Ying, Libao Jin, Chang Zhou, Jun Lou

(Dept. of Applied Mathematics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023)

Abstract: This paper obtained weighted Hardy inequality on mean convex domains of Euclidean Space and non-convex domains respectively via using function extreme value and selecting special vector fields method, and, eventually, extended the results of recent studies.
Key words: weighted Hardy inequality, mean convex domains, non-convex domains